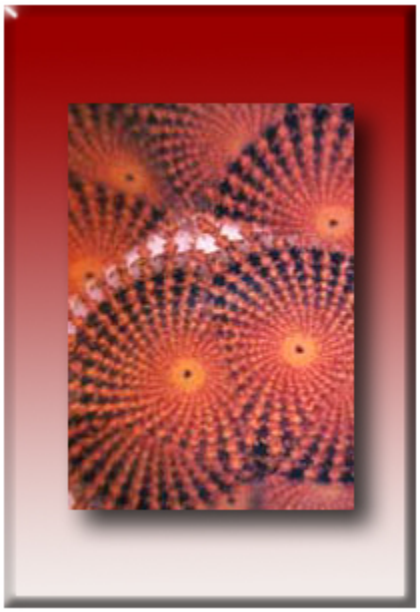
Un movimiento en zig zag



- AUTOR: ELIEZER BRAUN
- EDICIONES
- PREFACIO
- I. ¿QUÉ ES EL MOVIMIENTO BROWNIANO ?
- II. UN POCO DE HISTORIA
- III. SIGUE LA HISTORIA: EINSTEIN
- IV. ALGO SOBRE PROCESOS IRREVERSIBLES
- V. ¿QUÉ ES EMPÍRICO Y QUÉ ES MICROSCÓPICO
- VI. DESCRIPCIÓN EMPÍRICA DEL MOVIMIENTO
  - BROWNIANO.
  - ESTADÍSTICA
- VII. ¿QUÉ DICEN LOS EXPERIMENTOS?
- VIII. DESCRIPCIÓN MICROSCÓPICA
- IX. MUY BAJAS TEMPERATURAS
- X. COLOIDES, GELATINAS Y ESAS COSAS
- XI. OTROS TIPOS DE SISTEMAS QUE SE COMPORTAN ANÁLOGAMENTE: ...LOS LÁSERES
- XII. ALGUNAS COSAS RARAS COMO LOS FRACTALES
- CONCLUSIONES
- CONTRAPORTADA

EDICIONES

Primera edición, 1986

Tercera reimpresión, 1995

La Ciencia desde México es proyecto y propiedad del Fondo de Cultura Económica, al que pertenecen también sus derechos. Se publica con los auspicios de la Subsecretaría de Educación Superior e Investigación Cientifica de la SEP y del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

D. R. © 1986, FONDO DE CULTURA ECONÓMICA, S.A. DE C.V.

D. R: © 1995, FONDO DE CULTURA ECONÓMICA

Carretera Picacho-Ajusco 227; 14200 México, D.F.

ISBN 968-16-2457-2

Impreso en México

PREFACIO

En este pequeño libro se exponen algunos aspectos relacionados con el movimiento browniano. Se podría uno preguntar ¿por qué amerita este tema todo un libro? Podría parecer que es un simple fenómeno, en todo caso, de cierto interés, pero nada más.

En efecto, si se intentara relatar solamente lo estudiado acerca del movimiento browniano, la duda arriba expresada podría tener razón de ser, mas el caso del movimiento browniano ofrece un horizonte mucho más amplio que la explicación del fenómeno en sí. Ha sido usado para aclarar muchas cuestiones fundamentales del desarrollo conceptual de la física. Podemos mencionar que, entre otras cosas, tuvo un papel muy importante en el esclarecimiento de la validez de la segunda ley de la termodinámica; además ayudó a establecer, de una vez por todas, que la materia está compuesta de átomos. Más adelante, se le ha usado para poder entender con cierto detalle, imposible en otro tipo de sistemas, la manera en que ocurre la evolución irreversible de un sistema a su estado de equilibrio. De paso, fue un factor catalizador para desarrollar ciertos conceptos de matemáticas relacionados con el comportamiento y manejo de funciones no diferenciables.

Asimismo, el movimiento browniano ha sido un caso muy adecuado para poder realizar un ambicioso programa, todavía muy lejos de completarse, acerca del estudio microscópico de los procesos irreversibles. Es, en efecto, uno de los contados casos en que se ha podido avanzar algo en el entendimiento de los factores que dan lugar a que ocurra dicho tipo de procesos. Existen todavía muchas facetas, como por ejemplo la correspondiente a la descripción y explicación de fenómenos que ocurren a muy bajas temperaturas, que se están estudiando en la actualidad.

Un número muy grande de científicos se ocupa, hoy día, de estas cuestiones. En México se ha ido formando una escuela que ha realizado investigaciones en el fascinante campo de los procesos irreversibles

Por otro lado, existe otro tipo de sistemas, como las suspensiones coloidales que están formadas por partículas brownianas, que además de requerir una explicación científica tanto macroscópica como microscópica, de orden fundamental, tienen importantísimas aplicaciones en la industria y en la vida cotidiana. Muchas sustancias que usamos y comemos son suspensiones coloidales.

El comportamiento azaroso de una partícula browniana ha dado lugar al desarrollo de todo un sistema de ideas y de un lenguaje que son de gran utilidad en la descripción de otros sistemas físicos completamente distintos. Así, fenómenos de tipo estocástico, análogos a los que ocurren en el movimiento browniano, se presentan en el funcionamiento de un láser. Sin lugar a dudas, la comprensión bien definida del comportamiento de un láser es de mucha importancia, tanto conceptual como tecnológica.

Por otro lado, en los últimos años se ha desarrollado la teoría de los fractales, que tuvo su inspiración en fenómenos que ocurren en el movimiento browniano. En este campo en expansión, literalmente cada día se encuentra una nueva aplicación teórica o práctica, no sólo en las matemáticas, la física o la química, sino también en materias tan diversas como la biología, la economía, la geografía, etcétera.

Son pocos los temas concretos que, como el movimiento browniano, han alcanzado una influencia tan grande en el desarrollo de las ciencias, y que todavía hoy en día continúan abriendo a la ciencia nuevos horizontes.

I. ¿QUÉ ES EL MOVIMIENTO BROWNIANO ?

SI UN día vamos al cine y observamos en la oscuridad el haz de luz que emite el proyector, nos daremos cuenta de que hay muchas partículas, muy pequeñas, que se están moviendo incesantemente. Veremos que lo hacen en forma zigzagueante y en todas direcciones. Observaremos que ¡también se mueven hacia arriba! ¿Qué partículas son éstas? Sencillamente son las partículas de polvo que hay en el aire.

Observemos con cuidado la bocanada de humo que lanza al aire un fumador. Veremos que está compuesta de pequeñísimas partículas que se están moviendo continuamente en todas las direcciones, también en zigzag.

Otro caso es el siguiente: Póngase polvo de color en un vaso y luego, poco a poco, viértase agua sobre él. Observaremos que las partículas de polvo, una vez que empiezan a estar en contacto con el líquido se mueven en forma incesante, accidentada y en todas las direcciones. En particular veremos que se mueven también ¡hacia arriba! Si esperamos un intervalo de tiempo lo suficientemente grande nos daremos cuenta de que el polvo se mezcla con el agua, formando lo que se llama una suspensión. Esta mezcla con el tiempo se homogeniza sin que ocurra, como uno esperaría intuitivamente, que las partículas de polvo caigan y se depositen en el fondo del vaso. Veremos que algunas partículas efectivamente caen, pero hay otras que suben.

El hecho común en estos tres casos es que partículas muy pequeñas se hallan inmersas en un fluido. En el caso del haz de luz del cine, el fluido es el aire de la sala; en el caso del fumador, el fluido es también el aire de la atmósfera y en el tercer caso, el fluido es el agua.

El movimiento descrito arriba, que lleva a cabo una partícula muy pequeña que está inmersa en un fluido, se llama movimiento browniano. Este

movimiento se caracteriza por ser continuo y muy irregular (Figura 1). La trayectoria que sigue la partícula es en zigzag.

Figura 1. Trayectoria irregular que sigue una partícula browniana.

El físico francés Jean Perrin (1870-1942) dio una bella descripción de este fenómeno: "En un fluido en equilibrio, como el agua dentro de un vaso, todas sus partes aparecen completamente sin movimiento. Si ponemos en el agua un objeto de mayor densidad, cae. La caída, es cierto, será más lenta si el objeto es menor; pero un objeto visible siempre termina en el fondo del vaso y no tiende a subir. Sin embargo, sería difícil examinar durante mucho tiempo una preparación de partículas muy finas en un líquido sin observar un movimiento perfectamente irregular. Se mueven, se detienen, empiezan de nuevo, suben, bajan, suben otra vez, sin que se vea que tiendan a la inmovilidad."

II. UN POCO DE HISTORIA

EN EL año de 1828 el botánico inglés Robert Brown (1773-1858) observó que en una solución de agua el polen de cierta hierba (*Clarkia pulchella*) realizaba un movimiento continuo, muy accidentado, en zigzag. El orden de magnitud de la longitud lineal de estas partículas de polen variaba entre 5 y 6 micras (1 micra = 0.001 mm). Brown apuntó lo siguiente:

> Al examinar la forma de estas partículas inmersas en agua, vi muchas de ellas evidentemente en movimiento; éste consistía no solamente en un cambio de lugar en el fluido, manifestado por alteraciones en sus posiciones relativas, sino que también, con no poca frecuencia, por un cambio en la forma de la misma partícula [... .] En algunos casos se veía a la partícula girar sobre su eje mayor. Estos movimientos eran tales que me convencieron, después de observaciones repetidas, de que no surgían de corrientes en el fluido, ni de su gradual evaporación, sino que pertenecían a la misma partícula.

En el mismo trabajo, Brown señalaba que otros investigadores, antes que él, ya habían notado este movimiento. En particular, menciona los trabajos de F. W. von Gleichen, realizados unos 60 años antes, y de J. T. Needham. Sin embargo, Brown fue el primero que hizo una investigación detallada del fenómeno. En primer lugar quiso saber cuál era la causa de que el polen se estuviera moviendo todo el tiempo. Como primera hipótesis de trabajo sugirió la posibilidad de que se debiera a que el polen tenía vida. En consecuencia, puso dentro de un recipiente con agua el polen de plantas que habían muerto cien años antes. Observó que este polen también realizaba el mismo tipo de movimiento. Brown relata su sorpresa de la forma siguiente: ".... me llamó la atención este hecho tan inesperado de aparente vitalidad retenida por estas moléculas tanto tiempo después de la muerte de la planta."

Posteriormente, el mismo Brown volvió a repetir sus experimentos pero utilizando pequeñísimas partículas de cuerpos inanimados, como minerales.

Se dio cuenta que éstas realizaban el mismo tipo de movimiento. Más adelante repitió sus experiencias con humo, obteniendo el mismo resultado. Llegó de esta manera a la conclusión de que el movimiento no se debía a que la partícula tuviera vida.

De todo este trabajo, Brown sacó la conclusión de que tal fenómeno es característico de cualquier tipo de suspensiones en el que las partículas suspendidas tengan dimensiones muy pequeñas.

El trabajo de Brown atrajo mucho la atención de otros científicos europeos, quienes lo criticaron duramente, pues en él se proponía que el movimiento era autoanimado. Sugirieron en cambio todo tipo de explicaciónes físicas como, por ejemplo, diferencias de temperatura en el agua iluminada, evaporación, corrientes de aire, flujo de calor, capilaridad, etcétera.

El famoso físico inglés Michael Faraday defendió las ideas de Brown, señalando que este movimiento no se podía explicar por ninguna de las causas propuestas. Tanto Faraday como Brown admitieron, sin embargo, que no sabían cómo explicar este fenómeno.

LAS LEYES DE LA TERMODINÁMICA

Antes de continuar con nuestra historia debemos hacer un paréntesis para relatar algunos acontecimientos que se estaban llevando a cabo paralelamente.

Desde tiempos antiguos, el hombre ha estado en contacto con diversos fenómenos relacionados con el calor. Al igual que en otros casos, se intentó dar explicaciones a dichos fenómenos. Sin pretender hacer una historia detallada de este tema, solamente mencionaremos algunos puntos de interés para nuestros propósitos.

¿Cómo describir el calor? Hacia fines del siglo XVII se propuso el concepto del flogisto; éste era un fluido que los cuerpos ganaban o perdían durante la

combustión y otras reacciones químicas. Se creía que el calor era un fluido imponderable. Sin embargo, hacia fines del siglo XVIII, científicos como Antoine Lavoisier (1743-1794), Joseph Black (1728-1799) y otros desecharon esta idea con base en los resultados que habían obtenido en sus experimentos. El mismo Lavoisier propuso una alternativa con la teoría del calórico. Supuso que el calórico era una sustancia que no se podía ni crear ni destruir y que era un fluido elástico. Este modelo pudo explicar adecuadamente un buen número de fenómenos familiares.

Para ese entonces Benjamín Thompson, conde de Rumford (1753-1814) se había interesado en los fenómenos térmicos. Trabajó durante muchos años construyendo e inventando aparatos como hornos, chimeneas, etcétera. Se dio cuenta de que no era posible considerar al calor como una sustancia. En un célebre trabajo hizo ver que se podía producir calor por medio de fricción. Como ejemplo mencionó su experiencia en la perforación de cañones. Se había dado cuenta que podía generar tanto calor como quisiera simplemente produciendo tanta fricción como fuera necesaria. Esta experiencia la tenemos cotidianamente. Se puede calentar tanto como queramos algún objeto simplemente haciendo que otro resbale sobre él; aquí interviene el fenómeno de la fricción. A Rumford le llamó la atención el hecho de que

> ... las fuentes de calor generadas por fricción en estos experimentos parecían ser, evidentemente, *inagotables.* No es necesario añadir que algo que cualquier cuerpo o sistema de cuerpos aislados puede proporcionar *sin limites* no puede posiblemente ser una *sustancia material;* me parece que es extremadamente difícil, si no es que imposible, formarse una idea clara de algo capaz de ser excitado y comunicado en la manera en el que el calor fue excitado y comunicado en estos experimentos, que no sea el movimiento.

Sin embargo, Rumford no pudo aclarar el origen de este movimiento. Fue hasta la década de 1830 a 1840 que el gran físico inglés James Prescott Joule (1818-1889) realizó una brillante serie de experimentos y pudo demostrar que el calor era una forma de energía. Asimismo, presentó uno de los primeros

enunciados de la conservación de la energía. Casi simultáneamente a Joule pero de manera completamente independiente, el médico alemán Robert Mayer (1814-1878) publicó un trabajo en el que también enunció un principio de conservación de la energía. Sin embargo, se debe mencionar que los argumentos utilizados por Mayer para llegar a dicho enunciado contenían muchas generalizaciones sin base firme. Finalmente, el físico alemán Hermann von Helmholtz (1821-1894) publicó un tratamiento cuantitativo de la conservación de la energía en el que incluía también las energiás eléctrica, magnética y química.

Como resultado de estos trabajos se pudo formular entonces el siguiente principio: cuando el calor se transforma en cualquier otra forma de energía, o viceversa, la cantidad total de energía permanece constante; es decir, la cantidad de calor que desaparece es equivalente a la cantidad del otro tipo de energía en que se transforma y viceversa. Este principio se conoce como la primera ley de la termodinámica.

Consideremos ahora otro tipo de experiencias que se tienen acerca de fenómenos térmicos. Sabemos que si se ponen en contacto dos cuerpos con diferentes temperaturas, al transcurrir el tiempo el más caliente se enfría y el más frío se calienta, hasta que llega un momento en que ya no intercambian calor. Una vez alcanzado este momento, los dos cuerpos tienen la misma temperatura que permanece estable al seguir transcurriendo el tiempo. Se dice que los cuerpos en contacto han llegado a un estado de equilibrio térmico. Al observar lo anterior nos damos cuenta de que en la naturaleza los procesos ocurren en cierta dirección, a saber: el cuerpo más caliente se enfría y el más frío se calienta. En nuestra vida cotidiana hemos podido experimentar que el proceso inverso no ocurre en forma espontánea; es decir, sabemos que el cuerpo frío no se enfría más y el cuerpo caliente no se calienta más. Este último proceso no violaría la primera ley de la termodinámica y, sin embargo, no ocurre en la naturaleza.

Otro ejemplo es el siguiente: cuando un cuerpo resbala sobre una superficie rugosa, existe fricción entre ellos. La energía con la que el cuerpo se mueve, llamada energía cinética, se pierde y con el tiempo el cuerpo se detiene. Se dice entonces que la energía cinética se disipó. Esta energía se ha transformado en calor. Uno se puede dar cuenta de ello al tocar las superficies de contacto y sentir que se calientan. Esto es precisamente lo que vio Rumford. Ahora bien, la primera ley no se violaría si el cuerpo en reposo extrajera calor de la superficie con la que está en contacto, transformara este calor en energía cinética y empezara a moverse. Sin embargo, nunca observamos que esto ocurra espontáneamente.

Estos dos ejemplos ilustran un hecho muy general, según el cual los procesos que ocurren en la naturaleza solamente lo hacen en cierta dirección. El principio que nos indica la dirección en la que ocurren los procesos naturales es la segunda ley de la termodinámica.

Fueron varios los científicos que trabajaron en la elaboración de la segunda ley. Mencionaremos solamente a Sadi Carnot (1796-1832), William Thomson, lord Kelvin (1824-1907), B. P. Clapeyron y, finalmente, a Rudolf Clausius (1822-1888), quien hacia 1850 le dio la formulación final.

Una observación muy importante, que tiene gran relevancia para nuestros propósitos, es que las dos leyes de la termodinámica arriba mencionadas se obtuvieron y se aclararon sin la necesidad de establecer o definir en ningún momento de qué estaba hecha la materia. Fueron obtenidas a partir de propiedades y comportamientos macroscópicos de las sustancias.

Las leyes de la termodinámica fueron aceptadas y aplicadas en diversos campos tanto de la ciencia como de la ingeniería. Se puede afirmar que estas leyes tuvieron un fuerte efecto en la Revolución Industrial del siglo X1X. Se aplicaron intensamente en diseños de máquinas de vapor, en diversos

procesos químicos, etcétera. El enorme atractivo que tenían era su gran simplicidad y amplio campo de validez.

NACE LA TEORÍA CINÉTICA

Desde la antigüedad griega muchos pensadores elucubraron acerca de la composición de la materia. Diversas hipótesis se propusieron, sin que, en general, tuvieran verdaderas bases científicas. Además, estas hipótesis tampoco fueron aceptadas en general. De hecho, fue hasta principios del siglo XIX que, con los trabajos de John Dalton (1766-1844), se empezaron a dar los primeros pasos serios en el estudio de la estructura atómica de la materia. Posteriormente también contribuyeron de manera muy importante científicos como Joseph L. Gay-Lussac (1778-1850). Amedeo Avogadro (1776-1856) y Jöns Jacob Berzelius (1779-1848). Hacia mediados del siglo pasado ya se tenía un cuerpo de teoría adecuado, aunque incompleto, que implicaba que la materia estaba compuesta de partículas microscópicas, llamadas átomos. Debemos mencionar que de ninguna manera esta hipótesis fue aceptada en esa época por la mayoría de los científicos activos. De hecho fueron relativamente pocos los que así lo hicieron.

Hacia mediados del siglo XIX se enfrentaba la siguiente situación: por un lado, se habían planteado las leyes de la termodinámica que, como podemos recordar, se refieren a aspectos macroscópicos del comportamiento de las sustancias; y, por el otro lado, se vislumbraba cada vez con mayor claridad que la materia estaba compuesta de átomos. Surgió entonces la necesidad de conciliar estos dos conocimientos. Dicho en otras palabras, se planteaba la siguiente cuestión: era si la materia, en efecto, está compuesta de partículas microscópicas, ¿qué consecuencias macroscópicas tiene el comportamiento microscópico de una sustancia?

Esta pregunta ya se había planteado desde el siglo XVII, entre otros por Robert Boyle (1627-1691). En el siglo XVIII continuaron trabajando en ello

Leonhard Euler (1707-1783) y Daniel Bernoulli (1700-1782). Estos estudiosos obtuvieron algunas consecuencias a las que, sin embargo, no se les prestó la debida atención ya que por un lado, entonces no se aceptaba la hipótesis atómica y, por el otro, muchos de los conceptos utilizados eran bastante oscuros. Fue en la primera mitad del siglo XIX cuando se empezaron a dar los primeros pasos en firme. Varios trabajos de J. Herapath presentados alrededor de 1820 y de J. J. Waterston alrededor de 1845 retomaron la cuestión. Sin embargo, fue hasta mediados de siglo en que este tipo de teoría tuvo un feliz renacimiento. En efecto, entre 1850 y 1875 August Krönig (1822-1879), Rudolf Clausius, James C. Maxwell (1831-1879) y Ludwig Boltzmann (1844-1906) desarrollaron las bases de la moderna teoría cinética de la materia. Supusieron que las sustancias estaban compuestas de átomos y a partir de su comportamiento microscópico obtuvieron como consecuencia algunas propiedades macroscópicas. En particular, pudieron fundamentar varios resultados que ya se conocían en termodinámica y explicar diversos fenómenos. Calcularon, por ejemplo, propiedades tales como el calor específico, la conductividad térmica y la viscosidad de gases poco densos y todo ello en términos de propiedades de los átomos que los constituyen.

Asimismo, hemos de mencionar que, entre otras cosas, Maxwell obtuvo también como resultado de sus trabajos la distribución de las velocidades de los átomos en un gas en equilibrio. Esta cantidad indica cuántos átomos de un gas tienen un cierto valor de velocidad. Así, se puede saber cuál es la velocidad que tiene la mayoría de los átomos. Maxwell explicó la forma en que esta distribución depende de la temperatura del gas, de la masa de sus átomos, etcétera. A esta distribución se le llama maxwelliana. El mismo Maxwell realizó varios experimentos en los que verificó las predicciones teóricas hechas para la conductividad y la viscosidad de un gas poco denso.

Fue años después que se verificó experimentalmente que un gas en equilibrio, efectivamente, tiene la distribución de velocidades predicha por Maxwell.

REGRESAMOS AL MOVIMIENTO BROWNIANO

Después de este breve paréntesis regresemos a nuestra reseña de la historia del movimiento browniano.

Durante las tres siguientes décadas posteriores al trabajo de Brown, el interés por el movimiento browniano, que fue bautizado así en honor del botánico inglés, decayó. Casi nadie se dedicó a explicarlo o a investigarlo más.

Posteriormente, diversos investigadores estudiaron este movimiento. Entre ellos se puede mencionar a Christian Wiener (1863), Giovanni Cantoni y S. Oehl (1865) y a G. L Gouy (1889). Hacía mediados del siglo XIX se habían formado muchas hipótesis acerca de las causas del movimiento; sin embargo, con las observaciones experimentales varias de las hipótesis fueron eliminadas. En particular se pudo probar de manera contundente que este movimiento no se debía a que hubiera diferencias de temperatura entre dos regiones del espacio. El movimiento browniano se presenta también cuando la temperatura es la misma en todos los puntos del fluido. Asimismo, se desechó la hipótesis de que el zigzag se debía a fuerzas capilares, ya que también ocurría en recipientes muy grandes en los cuales dichas fuerzas no se manifiestan. Cantoni y Oehl mantuvieron sellada herméticamente una suspensión durante un año y encontraron que el movimiento browniano de las partículas no se alteró en ese intervalo.

En 1863 Wiener formuló varios argumentos para mostrar que el movimiento browniano no podía atribuirse a causas externas, sino que tenía que deberse a movimientos internos del fluido. Asimismo, Cantoni lo atribuyó a movimientos térmicos en el líquido, y consideró que este fenómeno nos daba una demostración experimental, bella y directa, de los principios

fundamentales de la teoría mecánica del calor". con esto se refería a la relación entre calor y movimiento, que aún en esas épocas no estaba suficientemente clara. De esta forma, durante la década de 1870 se expresó cada vez más frecuentemente la opinión de que el movimiento browniano estaba, de alguna manera, relacionado con el calor.

Por otro lado, como se relató, en esos tiempos ya se hablaba de que las partículas que componían las sustancias se movían. De hecho, Maxwell ya había estimado sus velocidades. Algunas personas consideraron la posibilidad de que el movimiento browniano fuera causado por las colisiones de los átomos del fluido con la partícula inmersa en él. El botánico alemán Karl Nägeli publicó un trabajo en 1879 en el que trató de probar que este mecanismo no podía ser el causante del movimiento browniano. Para llo, usó las estimaciones de las masas y velocidades de los atómos que se habían obtenido de la teoría cinética para calcular los cambios en la velocidad que experimentaría la partícula browniana después de una colisión con un átomo del fluido. Obtuvo que estos cambios deberían tener valores extremadamente pequeños, por lo que concluyó que ésta no podía ser la causa del fenómeno. El químico inglés William Ramsay llegó, casi simultáneamente, a la misma conclusión.

El argumento que daban era muy sencillo. Si, como es el caso, la partícula inmersa en el fluido tiene una masa mucho mayor que la de un átomo del fluido (Figura 2), entonces al chocar estas dos partículas, la partícula masiva casi no es afectada por el choque. En particular, Nägeli usó los valores apropiados para hongos que introdujo en un gas: la masa del hongo era 300 millones de veces más grande que la de la molécula del gas.

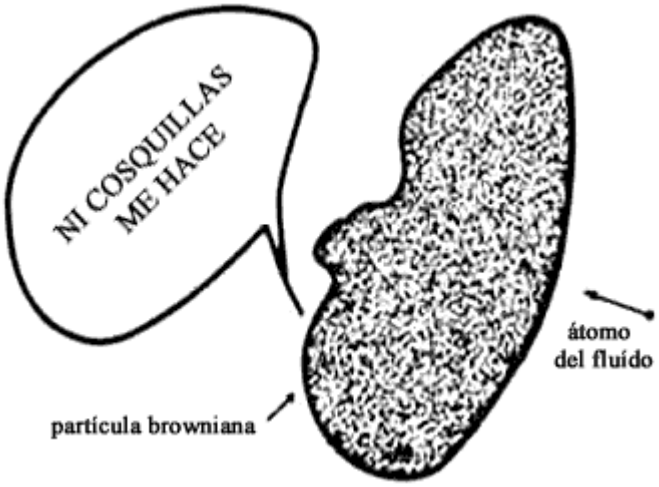


Figura 2. Colisión de un átomo del fluido con la partícula browniana

Otro científico interesado en el fenómeno fue el francés Léon Gouy que hizo diversos experimentos de los que concluyó que la vivacidad y agilidad mostrada por las partículas aumentaba a medida que el tamaño de la partícula era menor; asimismo, esta vivacidad aumentaba a medida que la viscosidad del líquido en que se metían las partículas disminuía.

Gouy también descartó la posibilidad de explicar este movimiento con base en colisiones con los átomos del fluido. Sin embargo, Gouy hizo la importante sugerencia de que el movimiento browniano podría ser una violación a la segunda ley de la termodinámica. El argumento que daba era que, al moverse la partícula en el fluido, en lugar de disipar su energía cinética en calor debido a la fricción entre ellos (la viscosidad entre el fluido y la partícula) ocurría que en ciertos momentos la velocidad de la partícula ¡aumentaba! Esto significaba que de alguna manera la partícula extraía energía calorífica del fluido y la transformaba en energía cinética.

Aún a principios del siglo XX la teoría de la composición atómica de la materia se encontró bajo muy fuertes ataques. En particular, la teoría era puesta en duda por los integrantes de la llamada escuela energética, como G. Helm, Ernst Mach (1838-1916), Wilhelm Ostwald (1853-1932) y P. Duhem. Ellos sostenían que había muchas contradicciones entre las conclusiones de

las teorías atómicas por un lado y las obtenidas de las leyes de la termodinámica, por el otro. Propusieron rechazar de plano las teorías atómica y cinética de la materia y quedarse solamente con las leyes de la termodinámica.

En resumen, podemos decir que en los primeros años del siglo XX la situación era la siguiente: por una parte, no se tenía una explicación firme y clara de las causas del movimiento browniano; al contrario, lo que se tenía era un panorama muy confuso y contradictorio. Por otro lado, un gran número de importantes científicos no aceptaba la hipótesis de la constitución atómica de la materia. Ellos abogaban por la tesis según la cual no era necesario desarrollar una teoría microscópica de las propiedades de la materia (o sea, la teoría cinética) sino que las leyes de la termodinámica eran suficientes, pues contenían toda la información necesaria sobre un sistema físico. Además, así se evitarían todas las inconsistencias y paradojas que aparentemente contenía la teoría atómica.

III. SIGUE LA HISTORIA: EINSTEIN

EN EL año de 1905 el famoso físico Albert Einstein (1879-1955) publicó un célebre trabajo en el que propuso la explicación del movimiento browniano. Es interesante notar que ese mismo año Einstein publicó otros dos famosos trabajos: el del efecto fotoeléctrico (que le valdría el premio Nobel de Física en 1923) y el de la teoría de la relatividad.

Para apreciar la contribución de Einstein hay que mencionar que hasta ese momento todos los argumentos propuestos para el movimiento browniano habían sido sólo *cualitativos*. Es decir, no se había formulado ninguna teoría de la que se pudiera colegir relación alguna que fuera susceptible de medirse experimentalmente.

En su trabajo, Einstein contrastó las predicciones de las leyes de la termodinámica con las de la teoría cinética, que estaba basada en la suposición atómica. En particular se interesó por las conclusiones que se obtendrían si el movimiento browniano se tratara de explicar por medio de la hipótesis atómica.

Un escollo importante fue la objeción hecha por Nägeli, que ya mencionamos antes, acerca de la posibilidad de que el movimiento browniano se pudiera explicar como efecto de las colisiones entre la partícula browniana y los atómos que componen el fluido. Se hizo ver que el argumento de Nägeli no era correcto. En efecto, en primer lugar, según había mostrado Maxwell, las partículas del fluido no tenían todas la misma velocidad, sino que tenían muchas velocidades; es decir, tenían una distribución de velocidades. Además, estas velocidades tienen todas las posibles direcciones (Figura 3). En segundo lugar, el número de colisiones que experimenta una partícula en un fluido es extraordinariamente grande, del orden de ¡10^{20} (un uno seguido de veinte ceros) colisiones en cada segundo! Entonces, y a pesar de que en cada colisión con un átomo del fluido una partícula suspendida en él cambia su velocidad en una cantidad extremadamente pequeña (tal y como lo calculó Nägeli), puesto que la partícula suspendida experimenta un número extraordinariamente grande de colisiones, el efecto acumulado de todas las colisiones resulta ser apreciable.

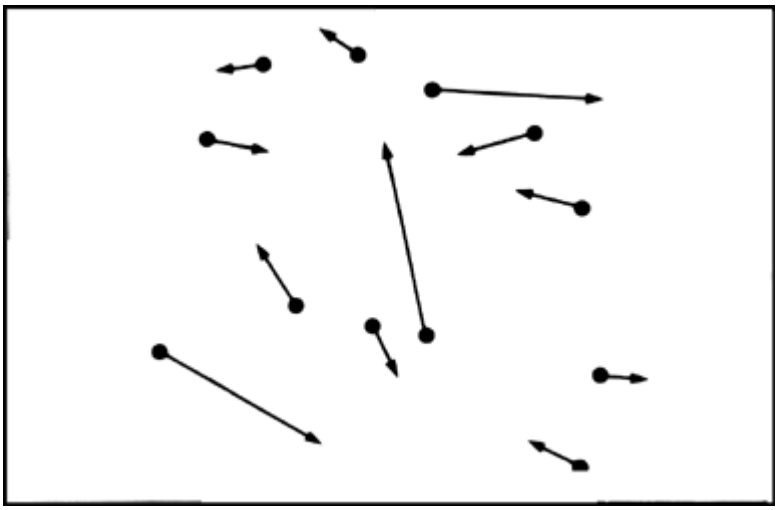


Figura 3. Las velocidades de los átomos de un fluido tienen todos las posibles direcciones y sentidos.

Otra objeción que se resolvió fue la siguiente: si las partículas del fluido chocan por todos lados con la partícula suspendida puede ocurrir que dos de ellas choquen en forma opuesta (Figura 4) de tal manera que el pequeño efecto que cada una de ellas hace sobre la partícula suspendida se cancele. Sin embargo, dado que es altamente improbable que dos partículas del fluido que chocan en sentidos diametralmente opuestos con la suspendida tengan justamente las mismas magnitudes de sus velocidades, esta cancelación de efectos no ocurre.

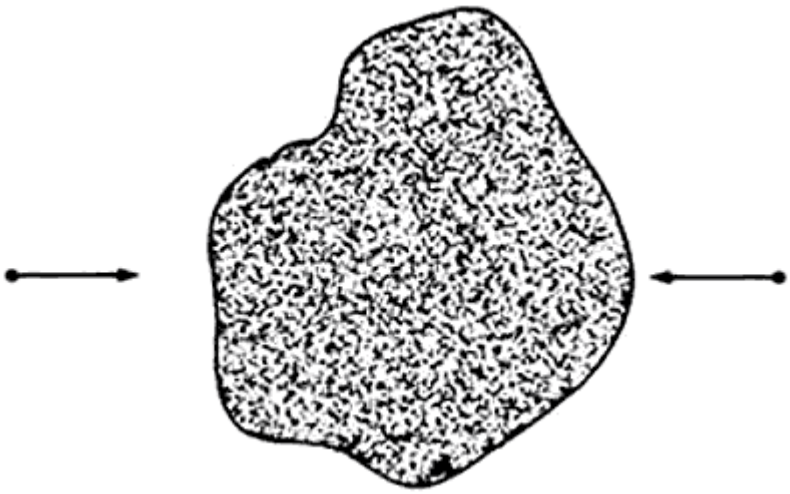


Figura 4. Es poco probable que en un instante dado dos partículas del fluido choquen con la browniana en forma diametralmente opuesta y tengan justamente las mismas magnitudes de sus velocidades.

Está claro entonces que el resultado neto es que la partícula suspendida experimenta un cambio finito de velocidad y que su dirección también se altera. Estos cambios son impredecibles tanto en magnitud como en dirección ya que dada la cantidad de colisiones, no es posible seguir el efecto individual de cada una de ellas. Pero lo importante es que éstas ocurren continuamente, por lo que la partícula suspendida cambiará su velocidad también en forma continua, tanto en magnitud como en dirección. De este modo, la partícula browniana realiza un movimiento fluctuante, azaroso, en zigzag como el mostrado en la figura 1. Nos damos cuenta de que este movimiento debe llevarse a cabo todo el tiempo mientras el sistema exista. Como se vio arriba, Cantoni y Oehl ya habían encontrado experimentalmente este resultado.

Un antecedente de mucha relevancia que hay que mencionar en este momento es que desde el año de 1902 Einstein había trabajado en la teoría microscópica de la termodinámica, teoría que en la actualidad recibe el nombre de mecánica estadística. En el transcurso de estas investigaciones, Einstein se vio en la necesidad de estudiar las fluctuaciones que ocurren en las cantidades termodinámicas alrededor de sus valores de equilibrio. Una vez que pudo establecer con claridad las características de estas fluctuaciones se interesó en aplicar las ideas que desarrolló a otros fenómenos físicos que involucraran también fluctuaciones. Éste fue uno de los motivos por los que se interesó en el movimiento browniano. Otro campo en el que aplicó sus ideas sobre fluctuaciones fue el de la radiación de cuerpo negro; de ahí surgio su famoso trabajo sobre el efecto fotoeléctrico.

Regresando al tema del movimiento browniano, Einstein obtuvo además de conclusiones cualitativas predicciones cuantitativas que podrían compararse con resultados experimentales. Entre estas predicciones destacan dos muy importantes: predijo la distancia que debe recorrer una partícula suspendida en un fluido y además, mostró que la segunda ley de la termodinámica se

cumple sólo en promedio. Supongamos que en el instante inicial la partícula suspendida está en cierto punto, digamos en A (Figura 5,(a)). Después de cierto tiempo τ, la partícula se encontrará en B, que está a una distancia d del punto inicial A. Si se repite esta experiencia, resulta que la partícula en el mismo tiempo t no se encontrará ahora a una distancia d como antes, sino a otra distancia, digamos $d_{<1}$ (Figura 5(b)). Si se vuelve a repetir la experiencia, en lugar de d_1 se encontrará otra distancia, digamos d_2 (Figura 5(c)), y así sucesivamente. Se pueden tomar los cuadrados de estas distancias encontradas en una sucesión muy grande de experiencias y calcular el promedio de estos cuadrados. Denotaremos este promedio como $<d^2>$ y lo llamaremos desplazamiento cuadrático medio. Einstein predijo que esta cantidad debe comportarse, según transcurre el tiempo, en la forma mostrada en la figura 6. Esta curva tiene dos secciones. La primera de ellas, que va de O a N, o sea entre el tiempo inicial y un tiempo que llamamos $\boldsymbol{\tau}$ es una parábola. Para tiempos mayores que $\boldsymbol{\tau}$, la gráfica es una línea recta, que corresponde a la sección NM. El tiempo es un tiempo extremadamente corto. Ahora bien, en mecánica se demuestra que el hecho de que la curva sea una parábola nos indica que en el intervalo entre O y τ la partícula suspendida se comporta como una partícula libre. Esto se desprende del siguiente argumento. Al colocar la partícula en el fluido, mientras no choque con ninguna de las partículas del fluido, se comportará como partícula libre. Es obvio que este intervalo dura muy poco tiempo. Una vez que empieza a chocar con las partículas del fluido, entonces, según Einstein, la gráfica cambia y debe ser una línea recta. Resulta de la hidrodinámica que un comportamiento rectilíneo de este tipo corresponde a la difusión de la partícula en el fluido. Einstein encontró, además, que la inclinación de la recta depende de varias cantidades: la temperatura del fluido, su viscosidad,

las dimensiones de la partícula y el número de Avogadro. Recordemos que éste es el número de átomos que contiene un mol de sustancia.

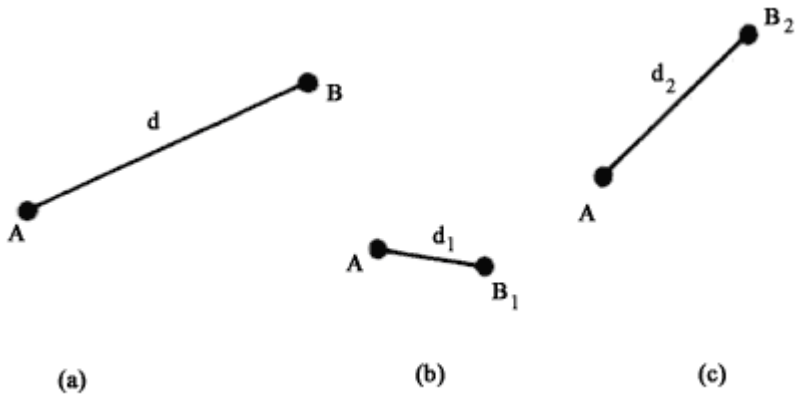


Figura 5. Al realizar repetidas veces la observación del movimiento de partículas brownianas que inicialmente están en el mismo punto (A), se encontrará que al final del mismo intervalo se hallan a distintas distancias de su posición inicial.

Por otro lado, Einstein hizo ver además, que en el caso del movimiento browniano efectivamente se violaba la segunda ley de la termodinámica, y no porque esta ley no fuera correcta, sino porque no se la podía interpretar de la manera absoluta en que los energeticistas lo hacían. De hecho había que darle una interpretación estadística: la segunda ley se cumple solamente en promedio.

De esta forma, Einstein planteó un problema al que solamente la naturaleza, a través de un experimento, podría dar solución: la posibilidad de medir el desplazamiento cuadrático medio de una partícula browniana.

Fue el físico Jean Perrin, con ayuda de su discípulo M. Chaudesaigues, quien entre los años 1908-1911 realizó este experimento. Describiremos brevemente la manera en que lo hiciera. En primer lugar, hay que darse cuenta de que no es posible registrar la posición exacta de una partícula browniana. Al ser observada en un ultramicroscopio, una partícula de éstas se manifiesta como un destello luminoso. Debido al tipo de movimiento que realiza, este destello parece vibrar alrededor de una posición promedio. Fue

V. Henri quien introdujo el método de observar este movimiento por medio de una serie de fotografías tomadas por una cámara cuyo ojo se abría en intervalos de 0.05 s y con exposiciones de 0.003 s. Lo que hizo Perrin fue tomar una serie de estas fotografías, registrando las posiciones de la partícula en intervalos de 30 s. Así obtuvo algo análogo a lo mostrado en la figura 1. Graficó luego los valores cuadráticos medios y obtuvo que, efectivamente, a partir de cierto instante, su gráfica era una línea recta. Además, pudo medir la inclinación de esta recta, y dado que conocía la temperatura y la viscosidad del fluido así como las dimensiones de la partícula, dedujo de la fórmula de Einstein que el valor del número de Avogadro debería ser igual a 6.4×10^{23}. Este valor concordaba con los obtenidos por otros métodos completamente independientes, como la electrólisis, el experimento de Millikan para encontrar la razón de la carga a la masa del electrón, la separación reticular en un cristal, y otros más. El valor del número de Avogadro, medido en la actualidad con mucha mayor precisión, es 6.02×10^{23}. Por sus estudios sobre el movimiento browniano Jean Perrin recibió el premio Nobel de Física en 1926.

La predicción de la línea recta que aparece en la figura 6 y el valor del número de Avogadro fueron también el resultado del trabajo de otros científicos, entre los que solamente citaremos a M. Seddig (1908), V. Henri (1908), T. Svedberg (1906-1912), F. Ehrenhaft (1907), M. de Broglie (1909), H. Fletcher (1911).

Después de esta brillante confirmación del trabajo de Einstein, y para ser más precisos, de las hipótesis que formuló, quedaron muy pocas dudas sobre la realidad de la estructura atómica de la materia. Así, por ejemplo, S. Arrhenius dijo lo siguiente en una conferencia que dictó en París en 1911: "Después de esto, no es posible dudar que la teoría atómica considerada por los filósofos

de la antigüedad, Leucipo y Demócrito, haya alcanzado la verdad, por lo menos en su parte esencial."

Fue Ostwald, uno de los impugnadores de la teoría atómica, quien en 1909 escribió en el prefacio de su libro *Grundriss der allgemeinen Chemie*: "Me he convencido de que hemos entrado recientemente en posesión de la prueba experimental de la naturaleza discreta de la materia, que la hipótesis atómica había buscado en vano durante siglos, por no decir milenios." Es decir, todos estos trabajos convencieron a Ostwald. Sin embargo, Ernst Mach, otro de los opositores, no cambió su opinión. De hecho, él fue prácticamente el único científico que no aceptó la hipótesis atómica por lo que se quedó solo.

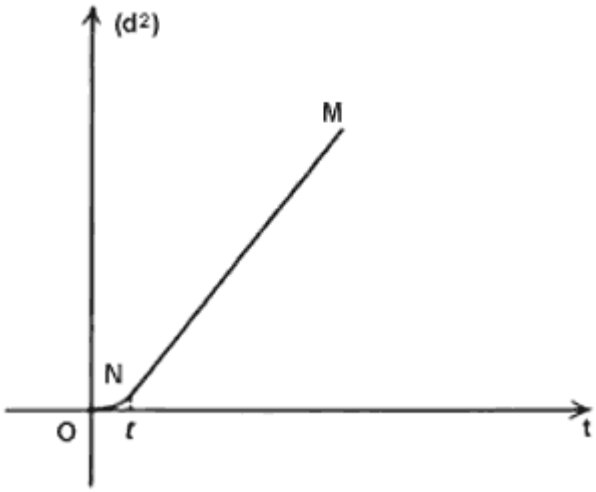


Figura 6. El desplazamiento cuadrático medio de la partícula browniana predicho por Einstein.

A partir de entonces se consolidó para siempre esta hipótesis y ya nadie ha vuelto a dudar de ella. Asimismo, quedaron claros los límites para entender la segunda ley de la termodinámica.

Se podría pensar que una vez explicado el movimiento browniano por el trabajo de Einstein ya no había nada que hacer en este campo. Sin embargo, esto no es cierto. La importancia del movimiento browniano dejó de residir en la explicación de sus causas o en la confirmación de la hipótesis atómica, adquiriendo un renovado interés por otras posibilidades que ofreció.

Solamente mencionaremos algunas de ellas: dar luz en el campo de los procesos irreversibles; impulsar al campo de las matemáticas que estudia las llamadas funciones no-diferenciables; aplicaciones en la teoría de suspensiones coloidales; utilización de estas ideas en otros campos, como el de los láseres; abrir sorprendentes horizontes en el desarrollo de la teoría de los fractales, y varias más.

IV. ALGO SOBRE PROCESOS IRREVERSIBLES

SUPONGAMOS que se tiene agua en un vaso y que en cierto instante se vierten dentro de éste varias gotas de tinta negra (Figura 7). Observaremos que, al transcurrir el tiempo, varias partes del agua empiezan a oscurecerse. En instantes posteriores, otras porciones del agua, que antes permanecían transparentes empiezan a colorearse. Esto ocurre hasta que, finalmente, toda el agua se oscurece. Una vez que esto sucede, el agua permanecerá indefinidamente así, a menos que se le haga algo.

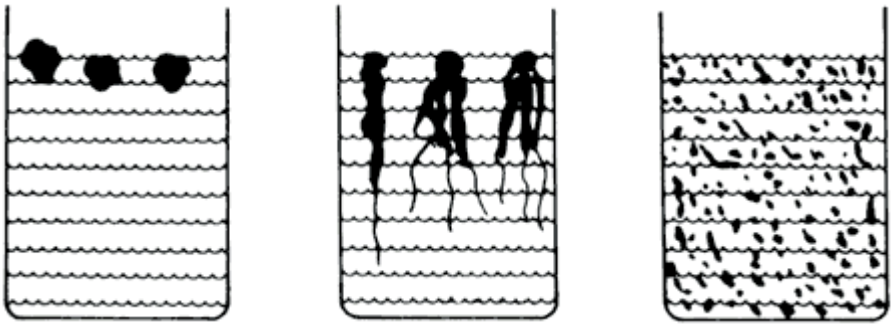


Figura 7. La difusión de gotas de tinta en agua es un proceso irreversible.

En esta experiencia la tinta, que inicialmente estaba en la parte superior del vaso, se difundió hasta que se homogenizó dentro del líquido. Al final del proceso la tinta quedó distribuida uniformemente dentro del agua. Una vez que se ha llegado a la situación uniforme, logra un estado de equilibrio.

El proceso por medio del cual se alcanza este estado es, en el ejemplo descrito, irreversible. Se le califica de esta manera porque no se da el caso de que en forma espontánea la tinta se recoja en algún lugar del agua. Por ejemplo, no ocurre que la tinta vuelva a formar las gotas que originalmente se vertieron.

Otro ejemplo sería el mencionado en el capítulo II: si dos cuerpos que están inicialmente a dos temperaturas distintas se ponen en contacto, el cuerpo caliente se enfría y el cuerpo frío se calienta, hasta que ambos adquieren la

misma temperatura. Esta temperatura común tiene un valor intermedio considerando las temperaturas iniciales. Una vez que los cuerpos tienen la misma temperatura la conservarán indefinidamente. Se dice, otra vez, que han llegado a un estado de equilibrio.

Este proceso también es irreversible, ya que por más tiempo que esperemos, no ocurre que de pronto uno de los cuerpos empiece a enfriarse y el otro a calentarse.

Un número muy grande de los fenómenos que conocemos son irreversibles. Además de los que acabamos de describir se pueden mencionar, por ejemplo, el envejecimiento de las personas, la disipación de energía mecánica por fricción en cualquier motor, la disipación de la energía al fluir una corriente eléctrica por un conductor, etcétera.

Un ejemplo más de proceso irreversible es el movimiento browniano. En efecto, si inicialmente la partícula suspendida tenía cierta velocidad y cierta posición, después de un tiempo dado y en particular en el régimen en que el desplazamiento cuadrático medio es lineal en el tiempo, la posición de la partícula y su velocidad ya no vuelven a tomar los valores que tenían inicialmente. Esto significa que la partícula no regresa al estado que tenía inicialmente. Por tanto, el movimiento browniano es un proceso irreversible.

Nos podemos dar cuenta de que en los distintos fenómenos irreversibles que hemos descrito va siempre involucrado un tiempo muy especial. Este tiempo es el que tarda el sistema en lograr el estado de equilibrio. Por ejemplo, en el caso de la difusión de la tinta en el agua, este tiempo es el que transcurre desde que se vierten las gotas de agua hasta que la coloración es uniforme. En el caso de los cuerpos a distintas temperaturas, éste es el que ellos tardan en alcanzar la temperatura común. A este tiempo se le llama tiempo de relajación del sistema.

Dado que los procesos irreversibles son tan frecuentes es muy importante poder entenderlos. En particular es de interés saber de qué factores depende el tiempo de relajación de un sistema.

V. ¿QUÉ ES EMPÍRICO Y QUÉ ES MICROSCÓPICO

EN EL capítulo anterior se habló de algunos procesos irreversibles. El problema ahora es cómo describirlos. En primer lugar, debemos saber cuáles son las cantidades importantes en cada uno de estos procesos. Una vez que se ha decidido esta cuestión surge otra, a saber, ¿qué relación existe entre las diferentes cantidades importantes?

Para aclarar lo anterior veamos un ejemplo. Consideremos el caso en que se ponen en contacto dos cuerpos que inicialmente tienen temperaturas distintas. Se sabe que la temperatura de cada cuerpo empieza a cambiar. Uno puede preguntarse qué valor tienen las temperaturas de cada uno de los cuerpos desde que se les pone en contacto. Para determinarlo colocamos un termómetro en cada cuerpo y medimos su temperatura a intervalos regulares. De esta manera se puede construir la gráfica de la temperatura de cada cuerpo como función del tiempo. Si se hiciese este experimento se encontrarían gráficas del tipo mostrado en la figura 8. Aquí $\mathbf{T_1}$ y T_2 son las temperaturas que tenían los cuerpos inicialmente. Se ha supuesto que la temperatura T_2 es mayor que la temperatura T_1 . Al transcurrir el tiempo, el cuerpo que inicialmente estaba caliente se enfría (curva superior en la figura 8), es decir, su temperatura disminuye. El cuerpo que inicialmente estaba frío se calienta, por lo que su temperatura aumenta (curva inferior en la figura 8). Después de un cierto tiempo θ, los dos cuerpos alcanzan la misma temperatura T, que luego cada uno mantiene indefinidamente.

Ahora bien, ¿qué cantidades son las importantes en el desarrollo temporal de este proceso? Esta respuesta se ha encontrado después de mucha actividad experimental. No entraremos en detalles, solamente daremos el resultado. Tomemos, por ejemplo, el instante de tiempo t (véase la Figura. 9). En este

instante las temperaturas de los cuerpos son T_1 (t) y T_2 (t), respectivamente. Resulta que si entre los dos cuerpos existe una diferencia de temperatura, entonces hay un flujo de calor del más caliente al más frío. El flujo de calor es proporcional a la diferencia de temperaturas entre los cuerpos. En particular, en el instante t, el flujo de calor es proporcional a la diferencia T_1 (t) - T_2 (t). Así, en el instante inicial esta diferencia de temperaturas es igual a AB (ver Fig. 9), mientras que en el instante t es igual a CD, menor que AB. En un instante posterior, **t'**, esta diferencia de temperaturas es igual a FG, que es más pequeña aún. Esto significa que inicialmente hay un flujo de calor entre los cuerpos que es proporcional a AB. Al transcurrir el tiempo, este flujo de calor va disminuyendo de manera continua. Así, después del tiempo **θ** y dado que las diferencias de temperaturas son prácticamente nulas, ya no hay flujo de calor entre los cuerpos y, por tanto, ya no se modifican sus temperaturas: se ha llegado al estado de equilibrio.

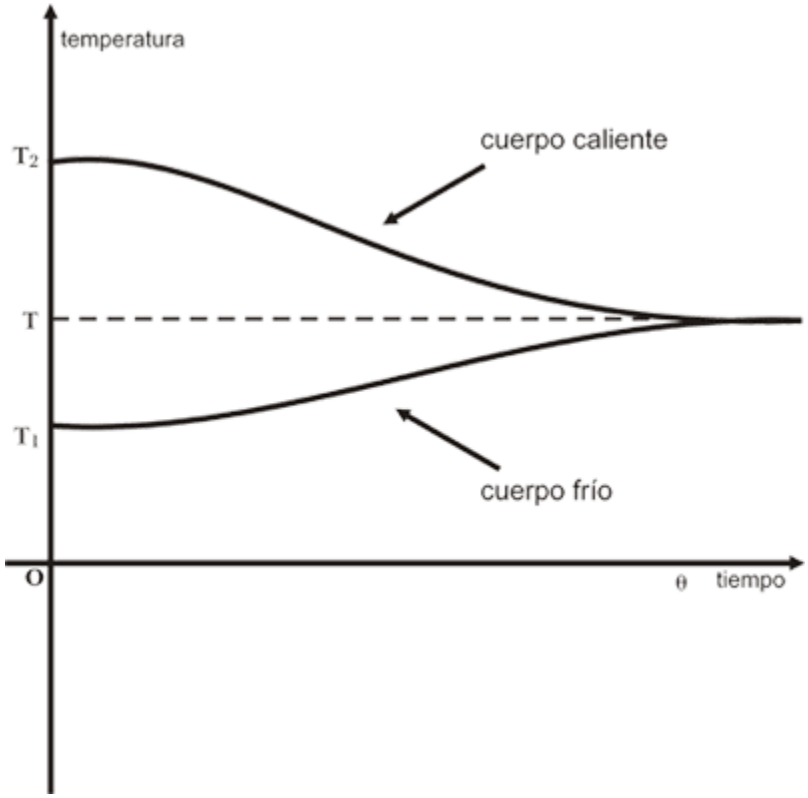


Figura 8. Variación de las temperaturas de dos cuerpos en contacto al transcurrir el tiempo. Inicialmente están a distintas temperaturas.

Se ha descubierto por la experiencia que uno de los factores importantes en la evolución de este fenómeno es la diferencia de temperaturas entre los cuerpos en contacto. Nótese que, por sí solos, los valores de cada una de las temperaturas de los cuerpos carecen de importancia, solamente su diferencia es significativa.

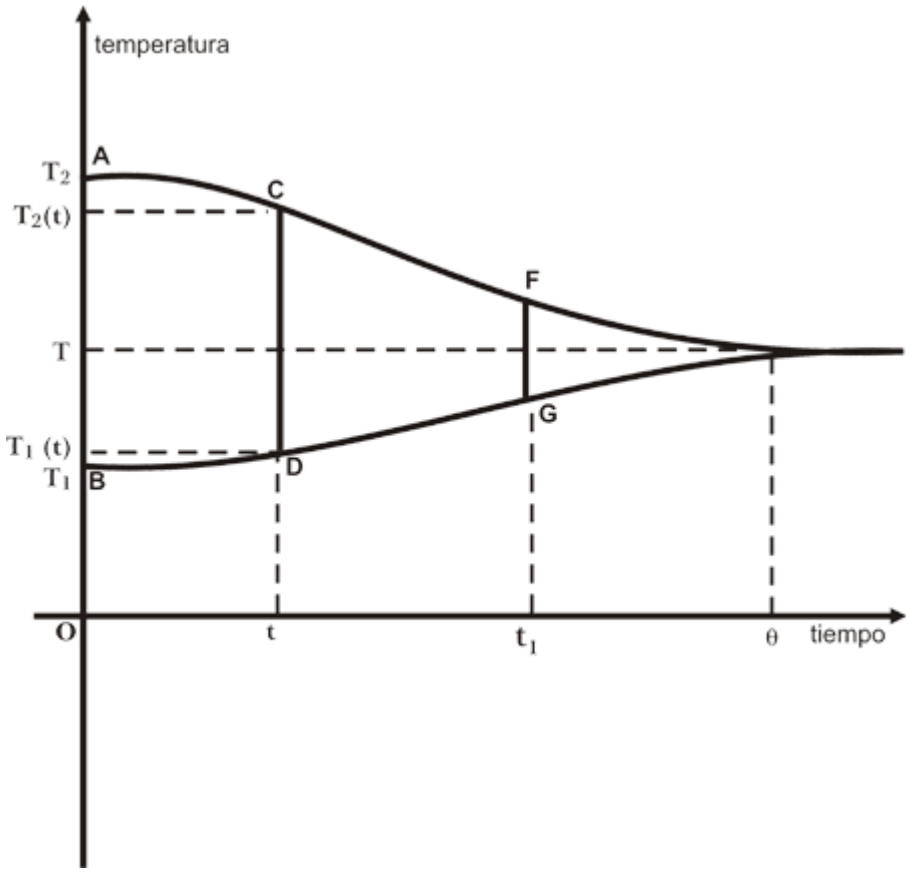


Figura 9. En cada instante el flujo de calor del cuerpo caliente al frío solamente depende de la diferencia de las temperaturas entre ellos.

¿Es éste el único factor importante? No: aun con la misma diferencia de temperaturas entre los cuerpos, no resulta lo mismo si se pone en contacto cobre con aluminio que si se trata de cobre con madera. Para la primera pareja de cuerpos se alcanza el estado de equilibrio en un tiempo θ mucho más pequeño que para la segunda pareja es decir, los tiempos de relajación en los casos son distintos. Ahora bien, la diferencia entre estos dos casos es que se cambió el aluminio por la madera.

El aluminio se diferencia, entre otras cosas, de la madera, por el hecho de que su capacidad de hacer pasar el calor es mayor que la de este material. Se dice que la conductividad térmica del aluminio es mayor que la de la madera. Pues bien, mientras mayor sea la conductividad térmica de una de las sustancias

que se ponen en contacto, más pequeño será el tiempo de relajación y, por tanto, se llegará más rápidamente al estado de equilibrio.

Existe además otro factor que influye en el fenómeno. Este factor es la capacidad del cuerpo frío de absorber el flujo de calor, y la capacidad del cuerpo caliente de emitir o soltar el flujo de calor. Esta cantidad se llama capacidad calorífica del cuerpo. Mientras más grande sea la capacidad calorífica de un cuerpo más fácilmente absorberá (o emitirá) la energía calorífica y más pronto se establecerá el estado de equilibrio. Por tanto, el tiempo de relajación también depende de esta capacidad.

Sintetizando: en el ejemplo que acabamos de dar, los factores importantes para la descripción del proceso irreversible son la diferencia de temperaturas entre los cuerpos, sus conductividades térmicas y sus capacidades caloríficas. En general, dados dos cuerpos que se van a poner en contacto, es necesario hacer experimentos para medir el valor de cada una de estas propiedades.

Debemos notar que en la descripción que se acaba de hacer del proceso irreversible nunca se tuvo que mencionar que cada uno de los cuerpos que se ponían en contacto estuviese compuesto de átomos. De hecho, las diferencias entre ellos solamente se manifestaron a través de características como la conductividad térmica y la capacidad calorífica y nada más. A este tipo de descripción se le llama empírica, fenomenológica o macroscópica.

Sin embargo, se sabe que los cuerpos están compuestos de átomos o moléculas. Por tanto, uno esperaría que también se pudiera describir este proceso irreversible en términos de las propiedades atómicas de las sustancias en contacto. Este tipo de descripción se llama microscópico, e implica que el conocimiento de las leyes microscópicas que rigen los movimientos de los átomos debería llevarnos, de alguna manera, a determinar el comportamiento macroscópico de la sustancia. En particular, se debería poder justificar cuándo y bajo qué circunstancias son válidas las leyes de la termodinámica

de las que hablamos en secciones anteriores; además, deberíamos ser capaces de predecir cuánto valen las diversas propiedades de las sustancias como su conductividad térmica, su capacidad calorífica, etcétera.

Hemos de mencionar que este problema, planteado tal y como lo acabamos de hacer, no ha sido resuelto hasta el día de hoy en forma general. Solamente para algunos sistemas sencillos, como gases a muy baja densidad, cristales perfectos o algunos sistemas magnéticos, se ha podido llevar a cabo, en parte, este ambicioso programa. Para sistemas más complicados el programa no se ha cumplido. Una de las principales dificultades estriba en que si se considera una sustancia macroscópica, ésta tiene alrededor de 10^{20} (¡un uno seguido de veinte ceros!) átomos en cada centímetro cúbico de volumen. En consecuencia, para describir su evolución y sus propiedades se requiere conocer la trayectoria que describe cada uno de sus átomos. A este problema se le llama en física el "problema de muchos cuerpos". Para fuerzas reales entre los átomos su solución rigurosa no se ha obtenido aún. Cabe hacer notar que en forma exacta se ha resuelto solamente el problema de dos (sí, dos) cuerpos. El problema de tres cuerpos solamente ha sido resuelto en forma aproximada. Si por algún motivo las fuerzas que se ejercen entre las partículas de un sistema son muy débiles, entonces se puede seguir con bastante precisión el programa arriba indicado. Esto es justamente lo que ocurre en los sistemas que se mencionaron antes, como los gases densos, etcétera.

Aprovecharemos la oportunidad para mencionar que este tipo de problemas de muchos cuerpos se presenta en varios campos de la física, como por ejemplo en la física atómica, en donde se trata de describir las propiedades de un átomo que está compuesto de varias partículas (núcleo y nube de electrones que lo rodea). Solamente ha sido resuelto rigurosamente el caso del átomo de hidrógeno, formado por un núcleo y un solo electrón, es decir,

se trata de un problema de dos cuerpos. Otros átomos han sido estudiados sólo en forma aproximada. Otro campo en donde tiene importancia el problema de muchos cuerpos es en la astronomía, en que se trata de describir los movimientos de varios cuerpos celestes, unos en presencia de otros. Por ejemplo, el caso del Sol, la Tierra y la Luna solamente ha sido resuelto en forma aproximada (aunque con una precisión muy alta). Finalmente, mencionaremos otro campo, el de la física nuclear, en donde se trata de entender él comportamiento del núcleo de un átomo, que está compuesto de varias decenas de partículas (protones y neutrones).

El movimiento de una partícula browniana inmersa dentro de un fluido proporciona un caso en el que sí es posible hacer una descripción dentro de los lineamientos arriba mencionados. En efecto, debido a la gran diferencia entre la masa de la partícula browniana y las masas de las partículas que componen el fluido,* resulta que es posible reducir su descripción a la del movimiento de un solo cuerpo. En ciertas condiciones, es ya posible resolver el problema y de esta manera estudiar con gran detalle la evolución irreversible del cuerpo hacia su estado de equilibrio.

Como ocurre con mucha frecuencia, se dispone de la descripción microscópica de un fenómeno. Es a partir de ello que se encuentran distintas consecuencias sobre el comportamiento del sistema en cuestión. Al hacer la descripción macroscópica, uno se contenta solamente con justificar las propiedades y leyes macroscópicas del sistema, dado que las consecuencias macroscópicas ya se han encontrado. Por lo tanto, antes de intentar hacer una descripción microscópica conviene conocer la macroscópica; es decir, saber hacia dónde encaminar los pasos, o en otras palabras, saber qué es lo que hay que justificar.

En vista de lo anterior, revisaremos en los siguientes capítulos el fenómeno del movimiento browniano desde el punto de vista de los procesos

irreversibles. En primer lugar haremos una exposición macroscópica del fenómeno y posteriormente se estudiará la manera en que se ha justificado microscópicamente.

NOTAS

* La masa de la partícula browniana es muy grande comparada con la de los átomos, pero muy pequeña desde el punto de vista macroscópico.

VI. DESCRIPCIÓN EMPÍRICA DEL MOVIMIENTO BROWNIANO. ESTADÍSTICA

UNA de las primeras descripciones macroscópicas del movimiento browniano fue hecha en 1908 por el físico francés Paul Langevin. Él hizo las siguientes consideraciones: si una partícula grande (comparada con las dimensiones atómicas) se introduce en un fluido, entonces, de acuerdo con la hidrodinámica, va a experimentar una fuerza opuesta que depende de su velocidad. Como ejemplo de este hecho podemos mencionar el caso de un auto o de un aeroplano que se mueven: el aire genera una fuerza que se opone al movimiento; o cuando nadamos en una alberca: el agua se opone a nuestro movimiento. Esta fuerza de oposición se debe a la viscosidad del fluido. Mientras mayor sea la velocidad con que se mueve el cuerpo dentro del fluido, mayor será la fuerza de oposición, o de fricción viscosa, que se genere.

Por otro lado, de lo descrito anteriormente se sabe que al introducir una partícula grande dentro de un fluido, aquélla experimenta fuerzas debidas a las colisiones que sufre con las moléculas del fluido. En vista de la gran cantidad de colisiones que ocurren en cada instante, esta segunda fuerza varía de una forma muy azarosa y violenta. Ello significa que si, por ejemplo, hacemos observaciones de la partícula browniana con una escala de tiempo del orden de los segundos la fuerza debida a las colisiones variará mucho, pues en un segundo habrán ocurrido muchísimas colisiones. Por otro lado, en esta misma escala de tiempo, la primera fuerza de la que hemos hablado, la de fricción, varía muy poco (Figura 10).

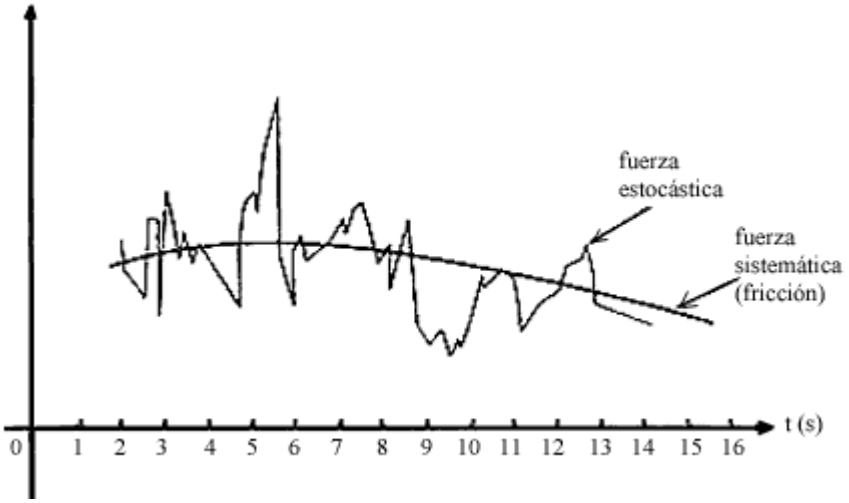


Figura 10. Las fuerzas estocástica y viscosa que experimenta la partícula browniana varían en diferentes escalas de tiempo

De esta manera, se reconocen dos escalas de tiempo muy distintas: la escala en la que varía la fuerza de fricción (que es, para casos típicos, del orden de segundos) y la escala en la que varía la fuerza debida a las colisiones (que es del orden de milésimas de microsegundo). Esto significa que si observamos los fenómenos con escalas de tiempo de segundos, la fuerza de fricción apenas cambia, mientras que la otra fuerza ya habrá cambiado muchísimas veces.

Ahora bien, si se conoce la velocidad de la partícula, la fuerza de fricción también se puede determinar: es proporcional a ella. Es decir, si la velocidad aumenta al doble, la fuerza se duplica; si la velocidad se triplica la fuerza aumenta al triple, etcétera. El coeficiente de proporcionalidad entre la fuerza y la velocidad depende de la viscosidad del fluido así como de la forma geométrica de la partícula. Estas dependencias son conocidas aunque no las daremos aquí. Además, el sentido que tiene la fuerza es opuesto al de la velocidad ya que aquélla se opone al movimiento (Figura 11). En otras palabras, es posible determinar completamente esta fuerza en cada instante.

En la teoría del movimiento browniano se suele llamar fuerza sistemática a esta fuerza de fricción.

Otra cosa ocurre con la fuerza debida a las colisiones. Dado que en un segundo el número de colisiones que experimenta la partícula browniana con las del fluido es enorme, resulta prácticamente imposible determinar el valor exacto de esta fuerza en cualquier instante. Por la misma causa, este valor varía en pequeños intervalos, de manera impredecible. Estamos entonces ante una situación en que una de las fuerzas que experimenta la partícula browniana varía de manera azarosa; es decir, se tiene una fuerza fluctuante. En matemáticas este tipo de cantidad recibe el nombre de estocástica.

Figura 11. La fuerza viscosa tiene sentido opuesto a la velocidad de la partícula.

Antes de continuar, haremos un breve paréntesis para hablar acerca de algunas propiedades importantes de las cantidades estocásticas. La parte de las matemáticas que trata de ellas es la estadística.

ESTADÍSTICA

Consideremos el caso de una fábrica que produce clavos de 20 cm de largo. Resulta que si medimos con cuidado las longitudes de los clavos fabricados, nos daremos cuenta de que no todos los clavos son de 20 cm. Los hay de 20.01 cm, de 19.99 cm, de 20.02 cm, etcétera. Por muy alto que sea el nivel del control de calidad, siempre se producirán clavos de distintas longitudes. Esto, en general se debe a una multitud de causas que son muy difíciles, o a veces imposibles de controlar. Por ejemplo, una pequeña variación en la temperatura del ambiente puede ser causa de que la longitud de los clavos

fabricados cambie. Esto tiene como consecuencia que los clavos producidos no tengan *todos* la misma longitud. De un lote, habrá cierto número de clavos con longitud de 20 cm, otros de 20.01 cm, otro número de clavos con 19.99 cm, etcétera. Por tanto, la longitud de los clavos es una cantidad estocástica. En consecuencia, se genera así una distribución de las longitudes de los clavos. En la figura 12 se muestra una gráfica de esta distribución. La gráfica nos indica el número de clavos que hay con determinada longitud. Vemos que la mayoría de ellos se encuentra alrededor de 20 cm. Sin embargo los hay, aunque muy pocos, de longitudes que varían bastante de 20 cm. Vemos que mientras mayor sea la variación de la longitud con respecto a 20 cm, menor será el número de clavos que haya con estas dimensiones.

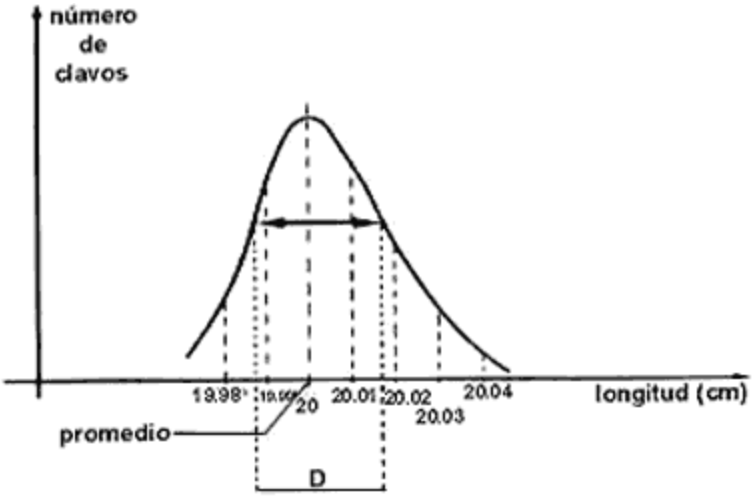


Figura 12. La distribución de las longitudes de una muestra de clavos.

Sin embargo, lo que sí se quiere garantizar es, por lo menos, que de un lote de clavos producidos, el promedio de sus longitudes sea de 20 cm (Figura 12). Una vez que reconocemos lo anterior, sería deseable que la mayoría de los clavos tuvieran longitudes alrededor de 20 cm, separándose muy poco, de este valor. Es decir, desearíamos que casi no hubiera clavos con longitudes de, por ejemplo, 22 cm. Ello significa, si nos referimos a la figura 12, que el ancho D de la curva de la distribución será muy pequeño. Así, consideremos las dos distribuciones mostradas en la figura l3. Vemos que ambas dan el

mismo promedio. Sin embargo, en una de ellas, la más ancha, sí hay un número apreciable de clavos que tienen longitudes que varían mucho de 20 cm, mientras que en la otra, la angosta, casi no hay clavos cuya longitud se aleja mucho de 20 cm. Diríamos que el control de calidad de los clavos asociado a la curva angosta es mejor que el asociado al otro lote. El ancho D de cualquiera de estas distribuciones se llama la desviación estándar de la distribución. Esta cantidad está asociada al promedio de los cuadrados de la longitud, es decir, a su valor cuadrático medio.

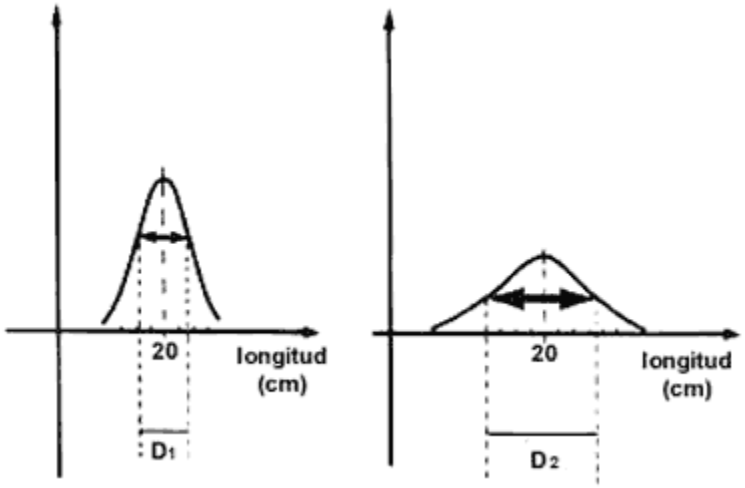


Figura 13. Dos distribuciones distintas que tienen el mismo promedio (20 cm) pero desviaciones estándar distintas.

Si el número de clavos producidos es muy grande, resulta que la distribución tiene, en general, una forma de campana, como la mostrada en la figura 12. A este tipo de distribución se le llama gaussiana o normal. Se puede demostrar en matemáticas que una distribución gaussiana queda completamente determinada si se conocen su promedio y su desviación estándar.

En general, si uno está tratando con cantidades estocásticas, su descripción se hace en términos de su distribución. Dos características que tiene la distribución son las anteriormente mencionadas: su promedio y su desviación estándar.

Regresemos ahora al caso del movimiento browniano. Una de las fuerzas que experimenta la partícula es, como se explicó arriba, estocástica. Por tanto, se tiene que decir algo acerca de su distribución. Además hay que tener en mente que esta fuerza estocástica cambia al transcurrir el tiempo, lo que significa que no sólo hay que decir algo acerca de su distribución en un instante dado de tiempo, sino también algo acerca de cómo están relacionados los valores de las fuerzas estocásticas en distintos instantes.

Langevin formuló la hipótesis, que de hecho es la más sencilla, de que la distribución de la fuerza estocástica es gaussiana. Por tanto, su determinación se reduce a conocer su promedio y su desviación estándar.

Promedio: En estas fuerzas fluctuantes, sería razonable pensar que si tomamos un intervalo de, por ejemplo, un segundo, se ejerciesen fuerzas en un sentido y en el sentido opuesto (Figura 14) de forma tal que, en promedio, la fuerza ejercida se cancelara. Se supone entonces que en cada instante el promedio de la fuerza estocástica es nulo.

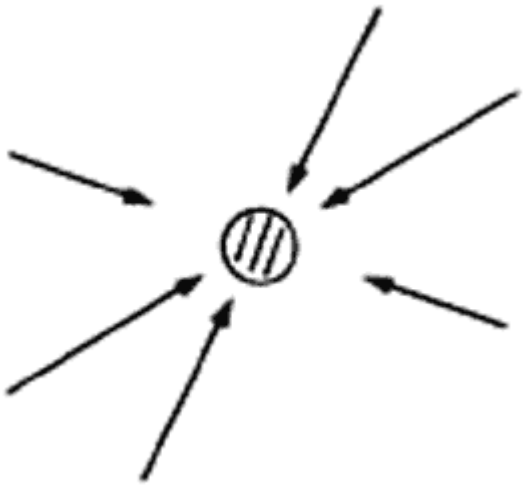


Figura 14. Fuerzas estocásticas que experimenta la partícula browniana es un intervalo de segundos. El promedio de estas fuerzas es nulo.

Desviación estándar: Si hacemos observaciones en escalas del orden de segundos, como se acostumbra en el laboratorio, entonces el valor de la fuerza estocástica en un instante dado no tiene nada qué ver con el valor que

adquiere la fuerza en otro instante que esté separado por segundos del primero. Esto se debe a que en un segundo la fuerza varió muchísimo, de tal manera que al final del intervalo la fuerza no tiene una relación estrecha con el valor que tenía al principio del intervalo. Se dice que las fuerzas estocásticas o fluctuantes no están correlacionadas entre sí en distintos instantes de tiempo.

En resumen, de estos razonamientos concluimos que la fuerza total que experimenta la partícula browniana es la suma de dos fuerzas: la sistemática y la estocástica. La fuerza estocástica varía mucho en la escala de tiempos en que cambia la fuerza sistemática. Ahora bien, si se suman dos cantidades, una de ellas conocida, pero la otra de naturaleza estocástica, la suma también va a ser estocástica. En consecuencia, la fuerza total que experimenta la partícula es estocástica.

Por otro lado, de acuerdo con los principios de la mecánica desarrollados por Newton, la fuerza que experimenta una partícula determina la trayectoria y la velocidad que tiene. Ello significa que, en nuestro caso, si la fuerza aplicada es estocástica, tanto la posición como la velocidad de la partícula son también cantidades estocásticas. En consecuencia, la solución del problema radica en poder determinar las distribuciones tanto de la posición como de la velocidad de la partícula, ya que en estas circunstancias no hay manera de determinar los valores precisos de la posición y de la velocidad en cada instante. En el mejor de los casos solamente se podrán determinar sus distribuciones.

Este problema se resuelve introduciendo en el fluido la partícula con una velocidad bien determinada de magnitud, digamos, v_0 . El resultado que se encuentra es que en cada instante tanto la velocidad como la posición de la partícula se definen en términos de distribuciones que también son gaussianas.

Consideremos primero los resultados para la velocidad y luego para la posición: se encuentra que el promedio de la velocidad se comporta como se muestra en la figura 15. Aquí $\mathbf{v_0}$ es el valor que tiene inicialmente la partícula. Vemos que al transcurrir el tiempo el promedio del valor de la velocidad va disminuyendo hasta que finalmente adquiere el valor de cero. Esto significa que la partícula llega a "olvidar" el valor inicial de su velocidad. El tiempo τ que la velocidad tarda en llegar a un valor pequeño, comparado con el inicial, se llama otra vez tiempo de relajación. Este tiempo τ depende de la viscosidad del fluido. Mientras más viscoso sea el fluido más pequeño será el tiempo τ. Es decir, mientras más viscoso sea el fluido, más rápidamente "olvidará" la partícula su velocidad inicial. El hecho de que el promedio sea nulo significa que la partícula puede tener velocidades tanto en un sentido como en el opuesto.

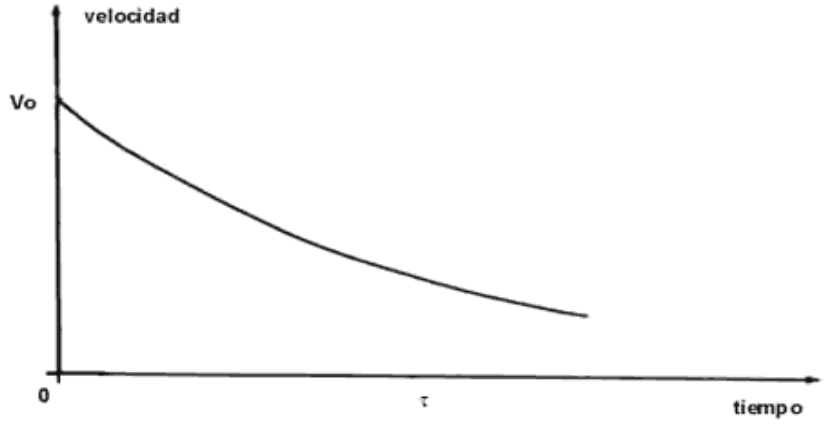


Figura 15. Promedio de la velocidad de la partícula browniana al transcurrir el tiempo, si inicialmente tenía el valor v_0.

La desviación estándar de la velocidad esta relacionada con su valor cuadrático medio. Esta última cantidad se comporta según se muestra en la figura 16. Inicialmente este valor es nulo. Esto se debe a que inicialmente se tiene la certeza de que la velocidad es justamente v0 . Otra manera de decirlo es que inicialmente la distribución de la velocidad tiene un ancho nulo. Al transcurrir el tiempo, el ancho de la distribución de velocidades va

aumentando, hasta que después de un tiempo t adquiere un valor constante. Este valor constante no depende de las condiciones iniciales. Nuevamente, esto significa que después de un tiempo t la particula "olvida" su condición inicial.

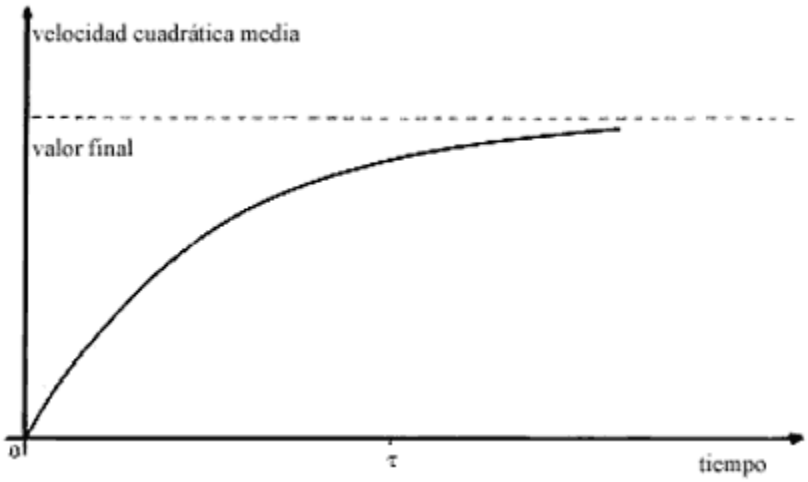


Figura 16. El valor cuadrático medio de las velocidades de la partícula browniana como función del tiempo.

En la figura 17 se muestran las distribuciones que va adquiriendo la velocidad al transcurrir el tiempo. Inicialmente (Figura 17, (a)) la distribución no tiene τ ancho y está situada en el valor υ_0, que es valor inicial. En este instante se tiene la certeza de que la partícula tiene la velocidad $\upsilon_{\mathbf{0}}$**.** Al transcurrir el tiempo, la partícula empieza a sentir la presencia del fluido y, en consecuencia, el promedio de la distribución se separa de su valor inicial, y el ancho de la distribución aumenta (Figura 17, (b)). Después de un tiempo τ la distribución adquiere una forma que ya no depende de las condiciones iniciales que tenía la partícula, es decir, se "olvidó" de ellas. Una vez que se adquiere esta distribución (Figura 17, (c)), ya no cambia al seguir transcurriendo el tiempo. Por tanto, el sistema partícula-fluido llega, en lo que a la velocidad respecta, a una situación de equilibrio. El tiempo t es, entonces, el tiempo que tarda la partícula en llegar a un estado de equilibrio con el fluido.

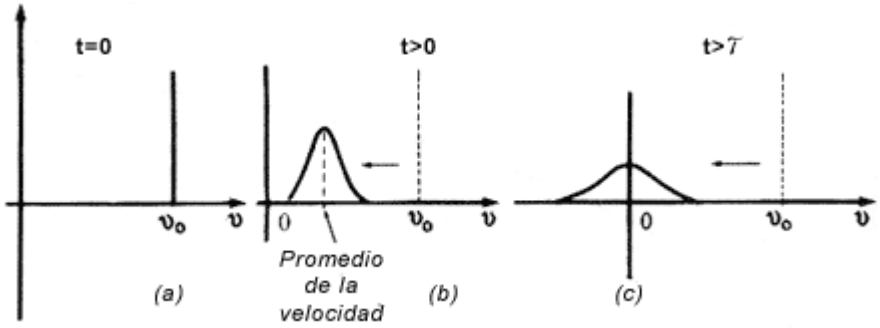


Figura 17. Evolución de la distribución de velocidades de una partícula browniana que inicialmente tenía una velocidad v_0.

Nos damos cuenta de que hemos descrito un proceso irreversible en el que la velocidad de la partícula pasa de una distribución inicial a la de equilibrio con el fluido. Ahora bien, resulta que la distribución de velocidades en equilibrio mostrada en la figura 17(c) es justamente la misma que obtuvo Maxwell para la distribución de velocidades en un gas en equilibrio (véase el capítulo 11). Es decir, la distribución de velocidades que adquiere la partícula browniana al llegar a equilibrio con el fluido es marxwelliana.

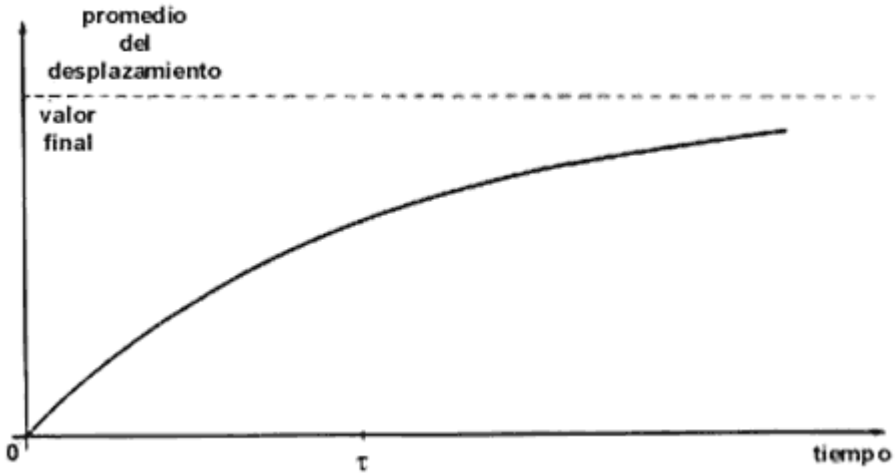


Figura 18. Promedio de desplazamiento de la partícula browniana al transcurrir el tiempo.

El promedio del desplazamiento en el transcurso del tiempo se muestra en la figura 18. El valor inicial es cero, ya que en un principio no ha habido ningún desplazamiento. Al transcurrir el tiempo, este promedio deja de ser nulo, y para tiempos del orden de τ adquiere un valor constante.

El desplazamiento cuadrático medio d^2 (relacionado con la desviación estándar) que se obtiene, es el mostrado en la figura 6, justamente el predicho por Einstein. Para tiempos pequeños, la partícula se comporta como si fuera libre. En este régimen, aún no ha "sentido" al fluido. Al seguir transcurriendo el tiempo, el desplazamiento cuadrático medio queda descrito por la línea recta NM de la figura 6.

Ahora bien, resulta que en hidrodinámica se demuestra que este régimen corresponde al llamado régimen difusivo, que consiste en lo siguiente: si al inicio de la escala de tiempos se tienen en un lugar del recipiente muchas partículas (Figura 7), éstas comenzarán a difundirse por todo el fluido) como sucede si se deja caer una gota de tinta negra en un vaso de agua. Después de un tiempo θ las partículas estarán repartidas homogéneamente en todo el líquido. Es decir, se habrá logrado una mezcla uniforme. Este tiempo θ depende de la longitud del recipiente que ocupa el fluido.

En general, para casos físicos reales, el tiempo hidrodinámico θ, es mucho mayor que el tiempo τ de relajación asociado a la velocidad, que antes introdujimos. Así, un valor típico de θ es de varios segundos (o más) mientras que τ es del orden de milésimas de microsegundo.

Por lo tanto, vemos claramente que en este caso la partícula browniana pasa de un régimen de partícula libre (que es reversible) a otro régimen, el difusivo, que es irreversible.

En resumen, de los resultados anteriores podemos llegar a la conclusión de que se pueden distinguir varias escalas de tiempo en el comportamiento de la partícula browniana.

1) Tiempos pequeños, mucho menores que τ. En este régimen la partícula se comporta como partícula libre. Todavía no "siente" que está inmersa en el fluido.

2) Tiempos grandes, mucho mayores que τ pero menores que θ. La interacción con el fluido hace que el comportamiento de la partícula se modifique completamente. En este régimen ocurren dos cosas: en primer lugar, las velocidades que va adquiriendo la partícula se modifican de forma tal que llega a un estado de equilibrio con el fluido; en segundo, la partícula empieza a desplazarse siguiendo un comportamiento difusivo. Es en este régimen de tiempos en que la velocidad y el desplazamiento de la partícula cambian su comportamiento a irreversible.

3) Tiempos hidrodinámicos. La partícula entra en un comportamiento determinado por la hidrodinámica. Después de un tiempo θ la distribución de las partículas en el espacio será uniforme, obteniéndose así el equilibrio total, tanto en las velocidades, que ya se había alcanzado en el régimen anterior, como en las posiciones.

La descripción detallada que se acaba de dar indica la forma en que idealmente se debería tratar el comportamiento irreversible de cualquier sistema macroscópico. En particular, de manera natural deberían obtenerse de la descripción los diversos regímenes por los que pasa el sistema en su evolución al equilibrio. Naturalmente, también la evolución al equilibrio debe concluirse automáticamente de la descripción que se haga. Desafortunadamente, este programa no se ha podido realizar en general para otros sistemas más complicados. Sin embargo, basándose en lo aprendido en el caso del movimiento browniano, el físico soviético N. N. Bogoliubov hizo en 1946 suposiciones sobre la existencia de diversos regímenes en la descripción de fluidos. En particular, la suposición de la existencia de las diversas escalas de tiempo tiene papel muy importante en la descripción del comportamiento irreversible de un gas moderadamente denso.

Por otro lado, el tratamiento matemático requerido para especificar los comportamientos reseñados implica la utilización de cantidades estocásticas

en las ecuaciones. Fue Norbert Wiener el primero que desarrolló esta cuestión, que corresponde a lo que en matemáticas se llama la teoría de funciones no-diferenciables.

VII. ¿QUÉ DICEN LOS EXPERIMENTOS?

LA TEORÍA fenomenológica explicada en la sección anterior predice varios resultados. En particular, con respecto a la distribución de las posiciones de la partícula, predice diversos comportamientos que se pueden, en principio, comparar con resultados experimentales.

En primer lugar, esta teoría indica que él desplazamiento cuadrático medio, para tiempos suficientemente grandes, tiene que comportarse linealmente con el tiempo (ver figura 6). Como ya se reseñó en el capítulo III, los experimentos de Perrin, Henri, etc., confirmaron efectivamente este resultado, predicho por primera vez por Einstein.

Sin embargo, la teoría puntualiza algo más. En particular, nos dice que la distribución de las posiciones de la partícula tiene que ser gaussiana. En 1911, el sueco The Svedberg hizo los primeros experimentos para medir esta distribución. Posteriormente, entre los años 1914 y 1916, el científico polaco Manan von Smoluchowski también hizo otra serie de experimentos con el mismo fin. En los años de 1916 a 1918 el físico sueco A. Westgren realizó una serie de experimentos de muy alta precisión para medir también esta distribución.

La idea esencial, sin entrar en los detalles experimentales, es considerar un fluido dentro del que se encuentra un conjunto de partículas brownianas. Se especifica una región bien determinada dentro del fluido que se está observando por medio de un ultramicroscopio. En intervalos de tiempo uniformemente espaciados, por ejemplo, cada segundo se realiza la observación. Esto se hizo tomando una serie de fotografías. Así se pueden contar en cada uno de estos instantes las partículas que se encuentran dentro del volumen en cuestión. Este número es proporcional justamente a la

distribución buscada. Se repitieron los experimentos para diversos tamaños y formas del volumen, así como para distintos fluidos (lo que implica distintas viscosidades), y a diferentes temperaturas. Resulta que las mediciones obtenidas concuerdan con la predicción dada en la sección anterior. La distribución de posiciones es una distribución gaussiana, con el promedio y el desplazamiento cuadrático medio dados en las figuras 18 y 6.

Hemos de añadir que en los experimentos arriba citados también se obtuvieron otras propiedades. En particular, a partir de las mediciones se obtuvo el número de Avogadro, que concordó satisfactoriamente con otras determinaciones hechas en forma independiente.

Los experimentos descritos fueron hechos, como se dijo, en tiempos del orden de segundos. Esto implica que se realizaron para tiempos mucho más grandes que el de relajación τ . Por tanto, las mediciones fueron hechas en el régimen hidrodinámico. Hacer experimentos para tiempos menores que el tiempo de relajación τ es muy difícil, habida cuenta de que, para los sistemas que se usaron, este tiempo es extraordinariamente pequeño, muchísimo menor que un segundo. Ello implica, en particular, que es prácticamente imposible observar directamente la relajación al equilibrio de la distribución de velocidades. Sin embargo, se ha podido determinar la distribución de velocidades de un sistema en equilibrio y resulta que, efectivamente, coincide con la distribución de velocidades maxwelliana que adquiere la partícula browniana, según se observó en el capítulo anterior.

VIII. DESCRIPCIÓN MICROSCÓPICA

EN LA sección anterior se reseñó la descripción macroscópica basada en las suposiciones hechas por Langevin. Como se recordará, Langevin supuso varias propiedades de las fuerzas, tanto sistemáticas como estocásticas, que experimentan las partículas brownianas. Una vez aceptadas estas suposiciones se pudieron encontrar conclusiones acerca de las propiedades que deben tener las distribuciones tanto de la velocidad como de la posición. Estas conclusiones se compararon con resultados extraídos de experimentos, obteniéndose un buen acuerdo, lo que significa que las suposiciones hechas son adecuadas.

Sin embargo, uno podría pensar que la manera en que se hicieron las suposiciones es, en cierta forma, artificial. Cabe preguntar: ¿se podrían justificar más fundamentalmente estas suposiciones? En particular, y como el lector podrá haber advertido, al proponer dichas suposiciones no se tomó en cuenta, en detalle, el hecho de que las sustancias en cuestión, por ejemplo el fluido, están constituidas por átomos, es decir, que tienen una estructura microscópica.

Dedicaremos pues esta sección a estudiar más a fondo la descripción microscópica del movimiento browniano. En este tipo de tratamiento se adaptan las ideas desarrolladas en la teoría cinética de la materia, ya descritas en el capítulo II. La aplicación de estas ideas al movimiento browniano se inició hacia fines de la década de los años 50 y continúa, de hecho, hasta hoy.

La idea general del enfoque microscópico es suponer la forma de las fuerzas que los átomos se aplican entre sí y con la partícula browniana. Con esto se plantean las ecuaciones mecánicas que describen el movimiento de cada partícula del sistema fluido-partícula browniana, por ejemplo, las que se

obtienen de aplicar la segunda ley de Newton. Si N es el número de átomos en el fluido, entonces se obtendrán (N + 1) ecuaciones de este tipo. Estas ecuaciones resultan muy complicadas, ya que, en general, una partícula puede interaccionar con cada una de las demás que componen el sistema (Figura 19). En general, no se han podido resolver exactamente estas ecuaciones. El procedimiento que se debe seguir es tratar de encontrar la solución para la partícula browniana, y ver qué influencia tienen sobre ella las demás partículas del sistema.

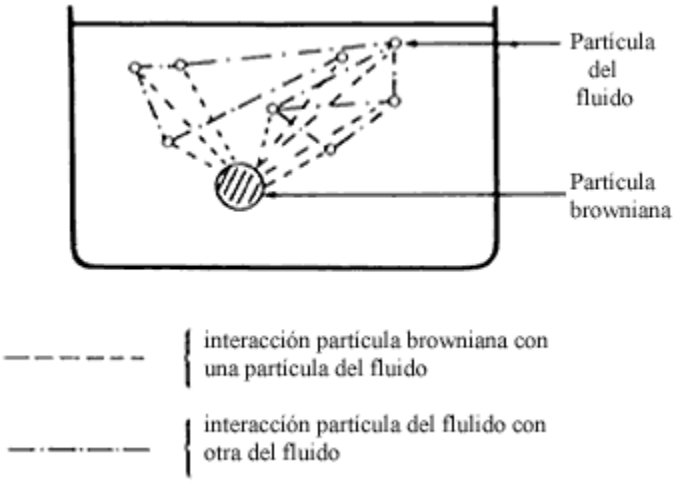


Figura 19. En el sistema partícula browniana-fluido cada una de las partículas componentes interacciona con todas las demás. En la figura solamente se indican algunas de estas interacciones.

Uno de los métodos seguidos es suponer que la masa de la partícula browniana es muchísimo mayor que la masa de cualquiera de los átomos que componen el fluido. Para los casos usuales la masa de la partícula browniana es unas 300 millones de veces más grande que la masa de un átomo del fluido. En estas condiciones, ocurre que las velocidades de cada una de las partículas del fluido son muchísimo mayores que las velocidades que tiene la partícula browniana. Con ayuda de este hecho se ha podido encontrar, para un fluido, la solución de manera aproximada. Hay que mencionar, sin embargo, que el desarrollo de este programa para fluidos está plagado de dificultades matemáticas, que todavía no han podido ser resueltas.

En vista de lo anterior, se ha intentado estudiar otro tipo de modelos para los cuales se puedan obtener resultados exactos, simplificando matemáticamente el modelo pero manteniendo suficiente contenido físico para que siga siendo de interés. Estos trabajos fueron realizados principalmente por P. C. Hemmer (1959), R. Rubin (1960), G. Ford, M. Kac y P. Mazur (1965), P. Mazur y E. Braun (1964). Los modelos llamados genéricamente de osciladores armónicos acoplados satisfacen los requisitos mencionados.

Se han estudiado estos modelos en una, dos y tres dimensiones. Sin embargo, las ideas físicas fundamentales que se manejan y los resultados que se obtienen en los modelos de una dimensión son, en esencia, los mismos que se presentan al tratar con otras dimensionalidades. Así que, para simplificar, analizaremos a continuación modelos de osciladores armónicos en una dimensión. Esto significa que cada uno de los átomos o moléculas de nuestro sistema solamente se puede mover a lo largo de una línea recta.

Imaginemos un conjunto de partículas colocadas a lo largo de una línea recta, en posiciones equidistantes. Supongamos ahora que entre cada pareja de partículas adyacentes hay un resorte (Figura 20). Si, por algún motivo, cualquiera de las partículas se mueve, nos podemos dar cuenta que después de cierto tiempo todas las demás partículas habrán de moverse. Esto se debe a que todas las partículas están acopladas entre sí por medio de resortes, aunque la interacción directa de una partícula sea solamente con sus dos vecinas próximas. A este sistema se le llama conjunto de osciladores armónicos. En este modelo, una de las partículas, la de masa grande, desempeñará el papel de la browniana, mientras que todas las demás, de masas pequeñas, representarán al fluido.

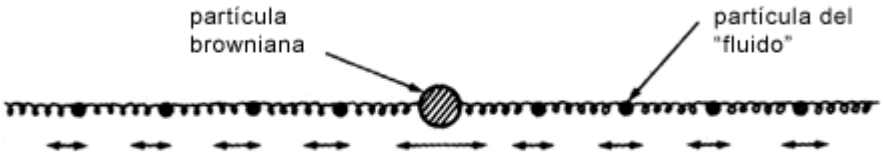


Figura 20. Modelo en una dimensión de un conjunto de osciladores armónicos. La partícula grande desempeña el papel de la browniana y el resto de ella el del fluido.

Se ha podido resolver en forma exacta el sistema de ecuaciones de movimiento de todo el conjunto de partículas. La solución que corresponde a la partícula browniana se puede expresar de la siguiente forma:

En primer lugar para este modelo se ha podido estudiar con bastante detalle, la manera en que la evolución de la partícula browniana resulta irreversible. Para poner en el contexto adecuado esta cuestión, debemos mencionar que las ecuaciones de Newton, resultantes de su segunda ley, son ecuaciones que describen procesos reversibles. Entonces surge la pregunta: ¿cómo es posible que si la dinámica esencial del movimiento de las partículas del sistema es reversible, pueda ocurrir que la evolución de la partícula browniana sea irreversible? Este problema fue planteado en 1876 por Josef Loschmidt (1821-1895) y se le conoce como la paradoja de la reversibilidad.

Loschmidt planteó esta paradoja en forma general. De hecho dudaba que fuera posible, en principio, hacer la descripción que se intenta. Esto ocurría en tiempo en que todavía no se confirmaba la composición atómica de la materia.

Posteriormente, en 1896, Ernst Zermelo (187l-l953) planteó otra paradoja con la que trató de mostrar que no era posible suponer que la materia estuviese compuesta de átomos. Esta paradoja se basa en un famoso teorema general de la mecánica, el llamado teorema de recurrencia debido a Henri Poincaré (1854-1912), que dice: en un sistema mecánico con un número finito de partículas, los valores que adquieren en cierto instante las variables

que lo describen volverán a repetirse tan cercanamente a los originales como se quiera, si uno espera un tiempo suficientemente grande.

El teorema de Poincaré nos dice que si en cierto instante tomamos una fotografía de las posiciones y de las velocidades de las partículas que componen un sistema arbitrario (Figura 21 (a)), y si esperamos un tiempo suficientemente grande, el sistema regresará a un estado que tendrá valores de las posiciones y de las velocidades de sus partículas muy cercanos a los originales (Figura 21 (b)). Es decir, el sistema recurre a su estado inicial, y la nueva fotografía deberá coincidir con la original, lo que significa que la evolución del sistema no es irreversible, sino reversible. Este teorema de recurrencia es una consecuencia del carácter reversible de los movimientos descritos por la mecánica. Este teorema, como fue aplicado por Zermelo, nos hace ver que, según la mecánica, los procesos irreversibles no pueden existir.

Por otro lado, como se analizó en el capítulo IV, sabemos de nuestra experiencia diaria que sí existen procesos irreversibles en la naturaleza.

Es claro que estas dos paradojas son un grave escollo para la descripción general de procesos irreversibles, en particular, para el sistema que estamos tratando.

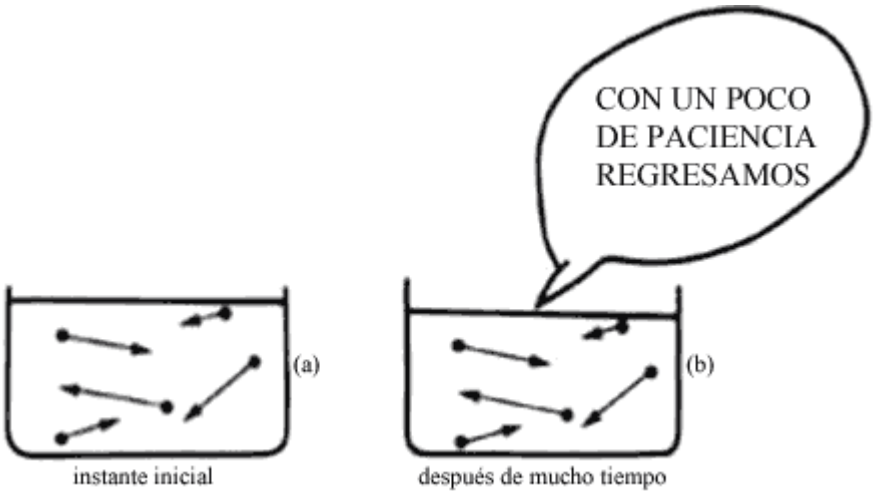


Figura 21. Si inicialmente un sistema tiene una configuración y ciertas velocidades (a), después de un tiempo suficientemente grande volverá a tener casi los mismos valores de sus posiciones y velocidades (b).

Afortunadamente la conciliación de estas paradojas se puede encontrar para el modelo de osciladores armónicos que estamos tratando. En efecto, es posible calcular el tiempo de recurrencia, es decir cuánto tiempo tarda un sistema, en un estado dado, en regresar a su estado inicial. Se ha hecho este cálculo para el caso de diez osciladores y se ha exigido que el sistema regrese a un estado en el que las posiciones recurran con un error menor o igual a 3%. Esto es, se quiere que las posiciones de las partículas estén en el intervalo $X_j + \Delta X_j$ ΔX_j donde X_j son las posiciones iniciales de las partículas y los intervalos ΔX_j sean tales que $\Delta x_j/x_j = 0.3$. En 1959 Hemmer encontró que para que esto ocurra tiene uno que esperar, en promedio ¡10^{10} años! (un uno seguido de diez ceros). ¡Este tiempo es más grande que la edad del Universo! Y esto solamente para diez partículas....

A medida que el número de partículas N del sistema aumenta, el tiempo de recurrencia también aumenta. Como vemos, dichos tiempos son astronómicos. Esto quiere decir que un observador como el hombre, con tiempos de observación del orden de, digamos, siglos (o milenios), no tendrá

oportunidad de darse cuenta de la recurrencia y sufrirá la sensación de que el fenómeno que estudia es irreversible.

Ahora bien, si el número de partículas N del sistema se hace extremadamente grande, por ejemplo, para tratar sistemas macroscópicos que contienen 10^{20} partículas en cada centímetro cúbico de volumen, entonces el tiempo de recurrencia se vuelve prácticamente infinito. Lo que ocurre es que al aumentar N, el tiempo de recurrencia se hace tan grande que deja de haber recurrencia y el fenómeno físico se vuelve efectivamente irreversible.

Como conclusión podemos decir que el movimiento de la partícula browniana será irreversible si el número de las otras partículas con las que está acoplada, las del "fluido", es muy grande, y de esta manera se concilian satisfactoriamente las paradojas de Loschmidt y de Zermelo.

Del tratamiento exacto también se encuentra que efectivamente la partícula browniana experimenta dos fuerzas, como lo supuso Langevin. Sin embargo, es solamente bajo ciertas condiciones que estas dos fuerzas que aparecen ahora tienen las mismas características que les asignó este científico. Veamos ahora cada una de ellas por separado.

En primer lugar, se obtiene una fuerza que es proporcional a la velocidad de la partícula browniana. Sin embargo, para que esta fuerza sea efectivamente la fuerza viscosa de la que hablamos en el capítulo VI se deben cumplir dos condiciones:

1) La masa de la partícula browniana tiene que ser muchísimo más grande que la masa de cualquier átomo del fluido.

2) El régimen de tiempos tiene que ser muy grande comparado con el tiempo característico de la colisión entre dos partículas.

Físicamente esto quiere decir que para que la partícula pesada realice movimiento browniano debe haber transcurrido suficiente tiempo como para

que haya recibido un número grande de impactos de las partículas que componen el fluido.

Bajo estas condiciones, la primera fuerza es justamente la viscosa y resulta que depende solamente de propiedades generales de las interacciones entre los átomos que componen el "fluido" y no de otros detalles específicos. Esto también está de acuerdo con las observaciones empíricas, ya que no importa qué tipo de partícula sea la pesada y en qué fluido se le introduzca: siempre que sea mucho más masiva que los átomos del fluido, realizará movimiento browniano.

Ahora consideremos las características de la otra fuerza que se obtiene del tratamiento teórico. Resulta que esta segunda fuerza depende de los valores iniciales de las posiciones y de las velocidades de los átomos que componen el fluido. En general, no hay manera de conocer estas cantidades con precisión. Lo que sí se sabe en las condiciones experimentales usuales es que el fluido en el que se introduce la partícula browniana está inicialmente en equilibrio a determinada temperatura. Esto quiere decir que en un principio las velocidades de los átomos del fluido están distribuidas de manera maxwelliana. Ello implica que las posiciones y velocidades iniciales son realmente cantidades estocásticas, que están distribuidas gaussianamente. Por lo tanto, la segunda fuerza es una combinación de cantidades estocásticas gaussianas (las velocidades y posiciones de las partículas del fluido), y en consecuencia, como se puede demostrar en estadística matemática, es una cantidad estocástica gaussiana.

Si además se cumplen las condiciones de los incisos 1) y 2), se puede demostrar que el promedio y la desviación estándar de esta fuerza estocástica tienen justamente las propiedades supuestas por Langevin, descritas en el capítulo VI. En particular, resulta que las fuerzas estocásticas no están

correlacionadas en distintos instantes de tiempo. Es decir, las fluctuaciones decaen muy rápidamente.

De esta manera vemos cómo a partir de un modelo microscópico se pueden justificar las suposiciones fenomenológicas de Langevin para descubrir el movimiento browniano.

Para finalizar este capítulo recordaremos al lector que este programa sólo se ha podido llevar a cabo, con toda plenitud, para el modelo de osciladores armónicos. Para otros tipos de sistemas, el problema continúa abierto.

IX. MUY BAJAS TEMPERATURAS

LA DESCRIPCIÓN microscópica presentada en el capítulo anterior supone que la dinámica que rige el movimiento de las partículas del fluido y el de la partícula browniana es la dinámica clásica, es decir, que los movimientos se rigen por medio de las ecuaciones de Newton. Sin embargo, en ciertas circunstancias, por ejemplo a bajas temperaturas, estas ecuaciones ya no rigen su descripción dinámica. Entonces la descripción que se tiene que hacer es cuántica.

Diremos unas cuantas palabras acerca de la mecánica cuántica. A principios del presente siglo varios investigadores como Max Planck, Albert Einstein, Niels Bohr, etc., se dieron cuenta de que varios fenómenos no podían explicarse usando la mecánica desarrollada por Newton, por ejemplo, la estructura de los átomos (véase el capítulo XI más adelante) o el comportamiento de las sustancias a muy bajas temperaturas. En general, se encontró que la descripción de los fenómenos microscópicos no puede hacerse tomando como base la mecánica newtoniana. Durante la década de 1920 se desarrolló una nueva mecánica, la cuántica, con la que sí se pudo dar una explicación satisfactoria de comportamientos microscópicos. Se descubrió que es precisamente con la mecánica cuántica con la que se tienen que describir todos los fenómenos. Pero resulta que si nos restringimos a cuerpos de masas muchísimo mayores que las masas atómicas, por ejemplo cuerpos macroscópicos que nos rodean cotidianamente, como pelotas, coches, edificios, etc., entonces la explicación cuántica coincide con la newtoniana.[1]

Hay que mencionar que no siempre tiene sentido físico trasponer la descripción de un sistema clásico a uno cuántico. Así, por ejemplo, no tiene caso intentar describir cuánticamente una partícula inmersa en un líquido a

muy bajas temperaturas, porque para aquellas temperaturas en casi todos los casos en que efectos cuánticos pueden aparecer, el líquido ya se habrá solidificado. Sin embargo, hay sistemas físicos de interés para los cuales sí tiene sentido físico (y es necesario) llevar a cabo una descripción cuántica. Solamente mencionaremos algunos sistemas: el movimiento de una partícula masiva en un sólido compuesto de partículas ligeras, el caso de una partícula eléctrica inmersa en un campo de radiación electromagnética fluctuante, un láser, entre otros. Haremos una breve presentación de los resultados que se han obtenido para estos casos.

El modelo de osciladores armónicos expuestos en el capítulo VIII se ha utilizado para tratar, dentro de ciertos límites, un sólido. Asimismo se puede demostrar que un campo electromagnético es equivalente a un conjunto de osciladores armónicos sin masa. En consecuencia, una partícula (con masa) eléctricamente cargada en interacción con el campo electromagnético es equivalente a una partícula en interacción con un conjunto de osciladores armónicos. Por lo tanto, el modelo de osciladores armónicos se puede aplicar a estos sistemas físicos.

Consideremos las mismas condiciones señaladas en el capítulo VIII, a saber:

1) El número N de átomos que forman el medio es muy grande. Así, se garantiza que los procesos son irreversibles. También en este caso, el cuántico, existe un teorema de recurrencia de Poincaré análogo al del caso clásico.

2) La masa de la partícula browniana es muchísimo mayor que la masa de cada uno de los átomos del medio.

3) Se tratará con tiempos muy grandes comparados con el tiempo que tardan en ocurrir dos colisiones entre las partículas.

Bajo estas circunstancias se encuentra que, efectivamente, la partícula browniana experimenta de nuevo dos fuerzas, análogas a las del caso de altas temperaturas. Con respecto a la primera de estas fuerzas la situación es idéntica a la analizada anteriormente.

Sin embargo, la fuerza estocástica ya no tiene las mismas propiedades que a altas temperaturas. Mientras que clásicamente la fuerza no está correlacionada consigo misma en cualquier otro instante, en el caso cuántico existe una correlación y puede durar un tiempo $\boldsymbol{\tau}_q$ muy grande (E. Braun, 1967). En la figura 22 se muestra la gráfica de la dependencia de este tiempo de correlación τ_q con la temperatura. A medida que la temperatura del medio se hace más baja, el tiempo de correlación se vuelve cada vez más grande. Es decir, se presenta un fenómeno de persistencia de las fluctuaciones (K. Lindenberg y B. West, 1984; E. Braun, 1985). Una característica muy interesante de este tiempo $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{q}}$ es que es universal. Con esto queremos decir que no depende de ninguna característica del sistema, salvo de su temperatura. Esto constrasta con el tiempo de relajación $\boldsymbol{\tau}$ obtenido para el caso de altas temperaturas, que sí depende de las características particulares del sistema. En otras palabras, dos sistemas distintos a la misma temperatura, tienen distintos valores de $\boldsymbol{\tau}$, mientras que tienen el mismo valor de $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{q}}$.

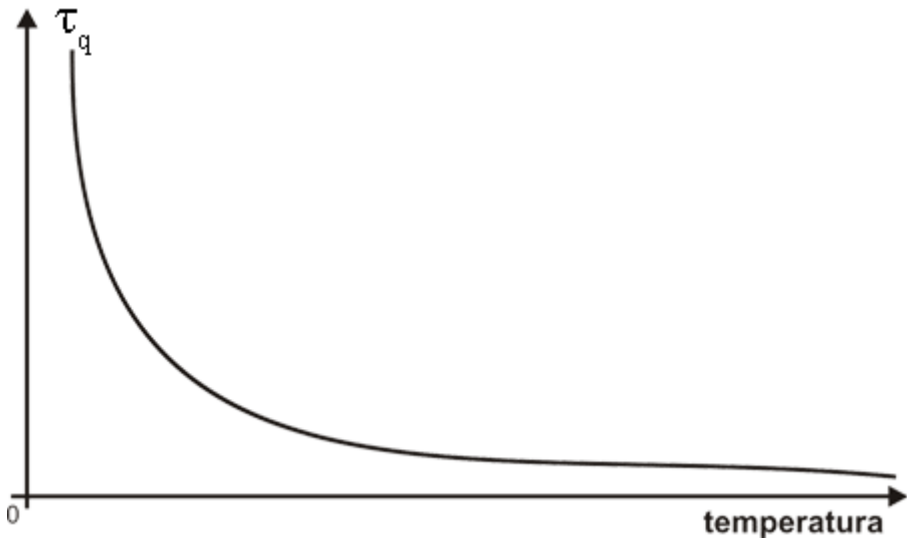


Figura 22. El tiempo de correlación cuántico τ_q como función de la temperatura. A medida que la temperatura disminuye el tiempo aumenta.

Una consecuencia de lo anterior es que el valor cuadrático medio de las velocidades ya no decae con un solo tiempo de relajación como ocurre en el caso clásico, sino que aparece, además, el nuevo tiempo de relajación cuántico τ_q. Debe mencionarse que aun en estas condiciones resulta que el promedio de la velocidad decrece como en el caso de altas temperaturas; es decir, con el tiempo de relajación τ introducido arriba.

Si la temperatura t es suficientemente baja, vemos de la gráfica que τ_q grande y por lo tanto existe un régimen de tiempos t tales que son muchos mayores que el tiempo de relajación τ por un lado, y por el otro, mucho menores que el tiempo de relajación cuántico τ_q (ver la figura 23).

En este régimen de tiempos, el valor cuadrático medio de la velocidad de la partícula no ha alcanzado todavía su valor de equilibrio, en contraste con el caso clásico en que para estos tiempos la partícula ya habría llegado a equilibrio y, por tanto, habría "olvidado" sus condiciones iniciales.

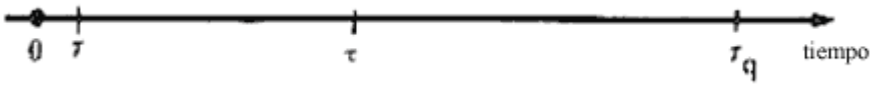


Figura 23. A temperaturas suficientemente bajas el tiempo τ puede ser mucho mayor que el tiempo de relajación $\boldsymbol{\tau}$, pero mucho menor que el tiempo cuántico $\boldsymbol{\tau_q}$.

En el caso clásico, como se vio anteriormente, el promedio de la velocidad de la partícula browniana decae en un tiempo $\boldsymbol{\tau}$; esta disipación se debe a la fricción (o viscosidad) que se genera entre el medio y la partícula, cuando ésta se mueve en el medio. Por otro lado, como vimos, el valor cuadrático medio de la velocidad también decrece con el mismo tiempo de relajación $\boldsymbol{\tau}$.

En el caso cuántico, a temperaturas suficientemente bajas, las cosas son distintas. Se presentan dos escalas de relajación diferentes: la debida a la fricción viscosa dada por τ y la de origen cuántico dada por τ_q. Lo anterior tiene como consecuencia que, en el caso clásico, el mecanismo de disipación viscosa relaja una fluctuación que haya ocurrido en el sistema por cualquier motivo. La fluctuación desaparece y el sistema regresa al equilibrio. En el caso cuántico esta descripción ya no es cierta. Las fluctuaciones a bajas temperaturas dejan de relajarse y por lo tanto la disipación viscosa no lleva al sistema al equilibrio.

Otra interesante consecuencia es la siguiente: dado que las cantidades físicas que acabamos de señalar determinan las propiedades macroscópicas, termodinámicas, del sistema, este efecto de la persistencia de las fluctuaciones debe ser observable. Hay que mencionar que diversas facetas de este problema todavía son hoy materia de investigación.

Es interesante anotar que el comportamiento cuántico que acabamos de presentar se ha obtenido a partir de una base microscópica. A diferencia del caso clásico, no existía antes una teoría fenomenológica (o empírica) cuántica en busca de fundamentación. Antes del desarrollo de las teorías cuánticas microscópicas no se había encontrado la forma de atacar el problema. Éste es

un buen ejemplo de la superioridad de las teorías microscópicas, que estudian con mayor profundidad los comportamientos de los sistemas macroscópicos.

NOTAS

1 Para una explicación más amplia véase E. Braun, *Una faceta desconocida de Einstein*, México, FCE, 1986.

X. COLOIDES, GELATINAS Y ESAS COSAS

EN LOS casos vistos hasta este momento hemos considerado que dentro del fluido solamente hay una partícula browniana. Sin embargo, se presentan con mucha frecuencia situaciones en que dentro de un fluido no hay una sino muchas partículas brownianas (Figura 24). Es decir, se tiene una suspensión de partículas dentro de un fluido. A este tipo de sistemas se les llama coloides. Los materiales coloidales son de gran importancia en diversos aspectos de la vida cotidiana e industrial. Ejemplos de sustancias coloidales son la pasta dentífrica, quesos, ciertas pinturas, gelatinas, plásticos, niebla, humo y esmog.

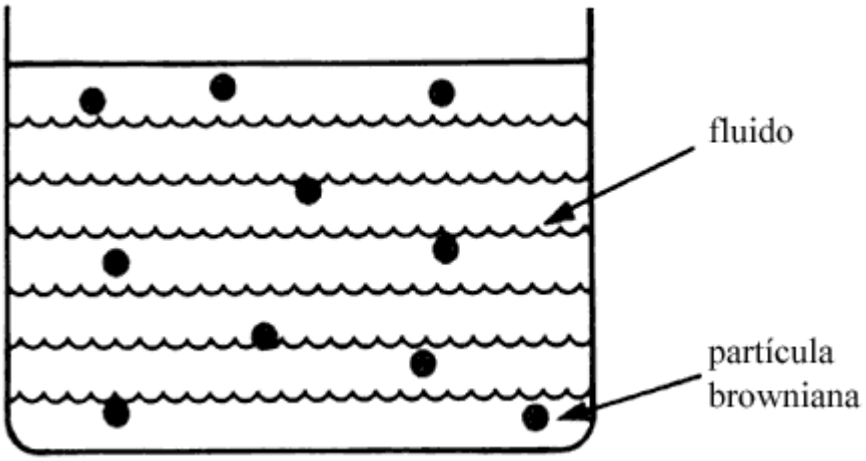


Figura 24. Suspensión coloidal en un fluido.

Una aplicación interesante de las ideas del movimiento browniano se da en el caso de las suspensiones coloidales. Éstas se forman por la dispersión en un fluido de partículas de tamaños del orden de micras, es decir, tamaños mucho mayores que las dimensiones atómicas o moleculares.

Dependiendo del tipo de partículas brownianas y los átomos o moléculas del fluido, se clasifican los coloides de diferentes maneras. Así, se tienen entre otros, aerosoles, geles, espumas y emulsiones. Describiremos algunas

características de estos sistemas. En todos los casos, las partículas grandes realizan movimiento browniano tal como se ha descrito anteriormente.

Aerosoles. Éstos son suspensiones en gases (Figura 25). Si las partículas suspendidas son sólidas, entonces el aerosol se identifica con humo o polvo. La diferencia entre estas sustancias es solamente cuestión del tamaño de las partículas: las del humo son mucho más pequeñas que las del polvo. Si, por otro lado, las partículas suspendidas son líquidas, el aerosol se identifica con niebla.

Figura 25. Ejemplo de aerosol.

Entre los aerosoles se cuenta el llamado esmog (vocablo formado por letras de las palabras en inglés que denotan humo y niebla) en el que partículas tanto líquidas como sólidas se encuentran suspendidas en el aire.

Otras suspensiones de este tipo son cúmulos de bacterias, virus, mohos en el aire, todas de mucha importancia sanitaria.

Geles. En este tipo de coloides, partículas tanto líquidas como sólidas están suspendidas en un líquido (Figura 26).

En muchas ocasiones, debido a que las partículas brownianas están cargadas eléctricamente, hay interacción entre ellas. Esto da lugar a que formen una "cuasi-red" cristalina, es decir, formen una estructura regular, lo que les da

una consistencia que no es la rígida de un cristal, pero tampoco la de fluido que corresponde al líquido.

Como ejemplos de geles se pueden mencionar las gelatinas, algunos jabones, ciertas arcillas, determinadas pastas como masillas, masas, barro, etcétera. Las gelatinas se emplean en la fotografía, ciertos cosméticos, en alimentos, etcétera.

Figura 26. Ejemplo de gel: una gelatina.

Espumas. Una espuma es una suspensión de partículas gaseosas en un líquido (Figura 27). En general, los líquidos puros no permiten la formación de espumas estables. Por ejemplo, si se agita agua pura no se obtiene espuma. Para ello es necesario el concurso de una tercera sustancia, el agente espumoso. Así, al añadir un jabón o un detergente al agua, después de agitar se logrará una espuma bastante estable. Otros agentes espumosos son ciertas proteínas, saponinas, etcétera.

Ejemplos de espumas son algunos alimentos como la crema batida y el merengue (clara de huevo batida); otro tipo de espumas son las usadas para combatir incendios que consisten de burbujas de dióxido de carbono. Otras sustancias que se obtienen de espumas son los materiales esponjosos. Estos se logran al solidificar el líquido que forma la espuma. Como ejemplos mencionamos algunos materiales plásticos aislantes.

Figura 27. Espuma de cerveza.

Emulsiones. Este sistema es un coloide en el que tanto el fluido como las partículas son ambos líquidos que no se mezclan, es decir, inmiscibles. Como ejemplo de emulsión podemos mencionar gotitas de aceite en agua (Figura 28). La agitación mecánica de una mezcla de agua con gotas de aceite forma una emulsión que no es estable. Después de cierto tiempo estas sustancias se separan, con el aceite sobrenadando en el agua. Para lograr una emulsión estable se necesita añadir un emulsionante.

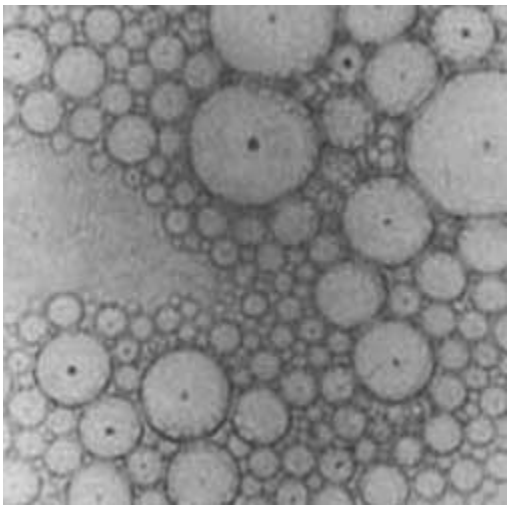


Figura 28. Emulsión de gotas de aceite en agua.

Las aplicaciones de las emulsiones son muy vastas. Se les encuentra con muchísima frecuencia en artículos farmacéuticos, alimenticios o en cosméticos. Por ejemplo, ciertas cremas y ungüentos son emulsiones.

También lo son las mayonesas y las margarinas Ésta última es una emulsión de partículas de agua dentro de aceite, estabilizada con aceite de soya al 1%.

El tratamiento fenomenológico de coloides consiste en suponer que hay cierto número de partículas coloidales inmersas en fluido y que, dado su tamaño, cada una de ellas realiza movimiento browniano bajo la acción de las siguientes fuerzas:

1) Una fuerza de fricción que se opone al movimiento de cada una de las partículas.

2) Una fuerza estocástica de la misma naturaleza que las analizadas en el capítulo VI.

3) Además, se añade una fuerza que ejercen cada una de las partículas coloidales. La naturaleza de esta fuerza depende de las características de las partículas suspendidas.

Como ejemplo, mencionaremos coloides con carga eléctrica neta. Este tipo de situación es muy común, por ejemplo en suspensiones acuosas como las gelatinas. En este último se han resuelto las ecuaciones resultantes obteniéndose los siguientes resultados:

Se encuentra la existencia de una estructura coloidal ordenada en el espacio (Figura 29). Resulta que las posiciones de cada una de las partículas brownianas queda ahora localizada en la vecindad de un punto. Es decir, se puede mover solamente alrededor de ciertos puntos que están fijos. Las características de la estructura que así se forma dependen de la concentración de las partículas brownianas. Resulta, sin embargo, que existe un fuerte ordenamiento aun para pequeños valores de concentración.

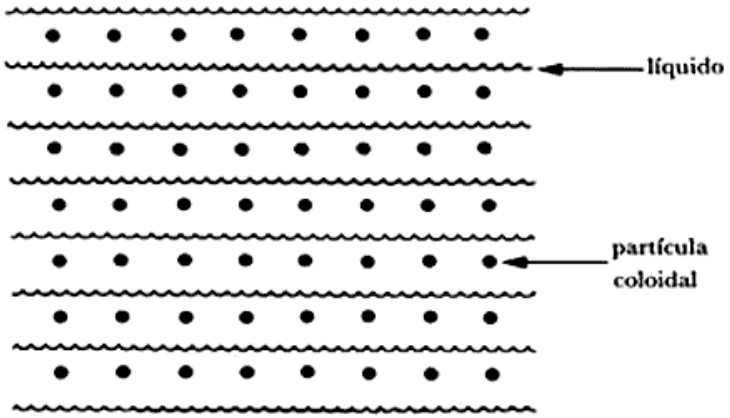


Figura 29. En una gelatina, las partículas brownianas forman una estructura ordenada, cuasi-cristalina, que se encuentra dentro del líquido.

También se han llevado a cabo tratamientos microscópicos de algunas suspensiones coloidales, a un nivel análogo a los descritos en el capítulo VIII. Se han estudiado fluidos (T. J. Murphy y J. L. Aguirre, 1972) y el caso de modelos de osciladores armónicos (E. Braun, 1980). Así se han justificado las suposiciones hechas en los tratamientos macroscópicos.

XI. OTROS TIPOS DE SISTEMAS QUE SE COMPORTAN ANÁLOGAMENTE: LOS LÁSERES

HASTA este momento se ha estudiado el movimiento browniano que realiza una partícula grande al trasladarse dentro de un fluido. Este movimiento azaroso y estocástico también se presenta en otros sistemas físicos. Haremos una revisión breve de algunos de ellos.

En el tratamiento presentado en los capítulos anteriores se ha supuesto, aunque no se mencionó, que las partículas brownianas bajo consideración eran, de hecho, partículas puntuales. No se trató para nada la posibilidad de que tuviesen cierta estructura. Por eso sólo se consideró el movimiento de traslación de su centro de masa. Sin embargo, las partículas de que hablamos son, en general, agregados de moléculas que sí tienen estructura. Esto significa que además de trasladarse, también pueden realizar un movimiento de rotación alrededor de su centro de masa (Figura 30).

Figura 30. Una partícula con estructura, además de trasladarse, puede girar alrededor de su centro de masa.

Al chocar dos partículas que tienen estructuras, además de intercambiar velocidades, lo que da lugar a una modificación del movimiento de sus centros de masa, pueden también modificar sus movimientos de rotación.

Dado que la partícula tiene estructura, girará alrededor de cierto eje; resulta entonces que si una partícula grande se introduce en un fluido, debido a las colisiones con las moléculas que forman el fluido la dirección del eje de rotación cambiará. Por el mismo tipo de argumentos presentados antes, y ya que el número de colisiones por segundo que experimenta la partícula es extraordinariamente grande, el resultado neto es que la dirección de su eje de rotación cambiará continuamente y de manera azarosa (Figura 31). Einstein desarrolló la teoría de este fenómeno al que denominó movimiento browniano rotacional.

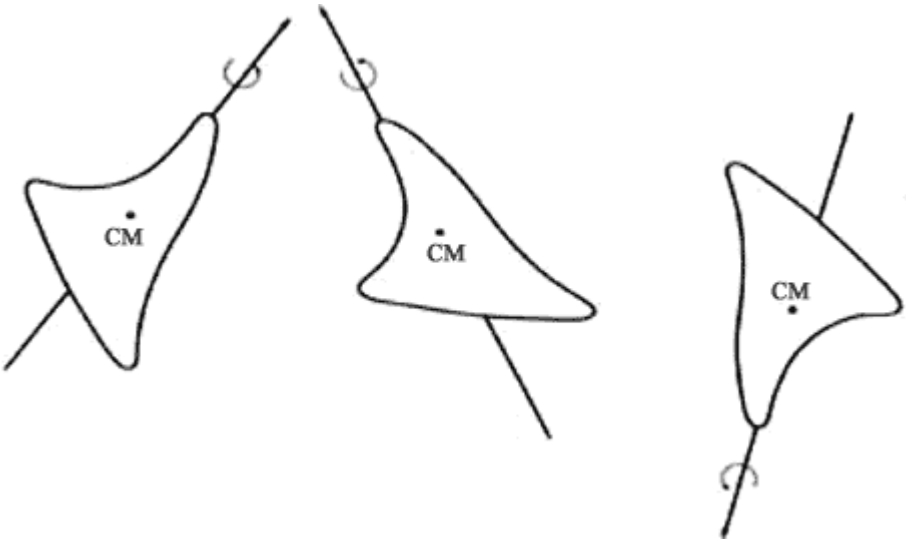


Figura 31. Ilustración de movimiento browniano rotacional.

El hecho de que el eje de rotación cambie azarosamente significa que los ángulos que determinan la dirección de este eje cambian en forma estocástica al transcurrir el tiempo. En consecuencia, al igual que antes, en este caso también se puede hablar de una distribución de los valores que adquieren los ángulos. De manera análoga a la que usó en el caso traslacional, Einstein obtuvo que el valor cuadrático medio de la distribución de los ángulos debería tener una variación lineal con el tiempo, para tiempos más grandes que un valor determinado. La constante de proporcionalidad depende de la temperatura, la viscosidad, la forma de la partícula y sus dimensiones.

Fue el mismo Jean Perrin quien en 1909 verificó, primero, la existencia de este tipo de movimiento, y luego la predicción de Einstein acerca del valor cuadrático medio de la distribución de los ángulos. Perrin usó para ello partículas de mastique de alrededor de 0.013 mm de diámetro. Al igual que en el caso traslacional, de estos resultados también se puede inferir el valor del número de Avogadro. Perrin lo hizo y obtuvo una buena concordancia con el valor que encontró para el caso traslacional, así como con los valores obtenidos para otros fenómenos independientes.

Se han encontrado las distribuciones de las velocidades angulares, en el caso de movimiento browniano rotacional: para ello se hacen consideraciones análogas a las de Langevin para el caso traslacional. Si la molécula browniana tiene una estructura esférica entonces la distribución es gaussiana (P. Hubbard, 1977). Si la molécula tiene una estructura de un cuerpo de revolución, como por ejemplo un trompo, resulta que la distribución no es gaussiana, sino que tiene una forma mucho más complicada (P. Hubbard, 1979; E. Braun y E. Cortés, 1986). Para moléculas con estructura arbitraria todavía no se ha encontrado la distribución en forma exacta.

La existencia del fenómeno de rotación browniana tiene algunas consecuencias importantes. Por ejemplo, podemos considerar el caso de una suspensión de partículas con estructura, que tenga carga eléctrica o dipolo magnético. Si no hubiera rotación browniana, al aplicar a la suspensión un campo eléctrico o magnético externo todas las partículas se alinearían al campo (Figura 32). Esto significa que cada una de estas partículas debería girar alrededor de un eje, el AA', que es paralelo a la dirección del campo. Sin embargo, si el fenómeno de rotación browniana existe, estos ejes cambian de dirección, aun en presencia del campo externo (Figura 33). Según el resultado de Einstein, el ancho de la distribución de la orientación de los ejes de rotación depende, entre otras cosas, del tamaño y forma de las partículas coloidales, idea que provee un método para medir estas cantidades. Es así

como, por el fenómeno de rotación se han determinado las dimensiones de algunas sustancias como, por ejemplo, los virus.

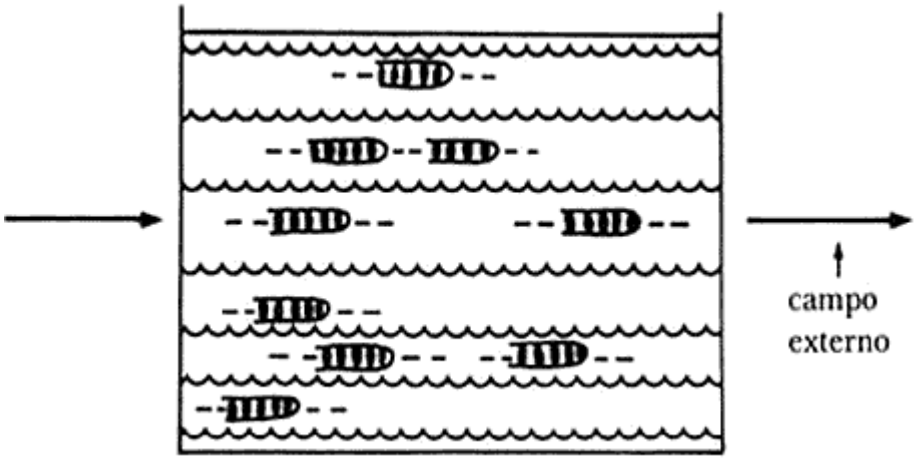


Figura 32. Al aplicar una fuerza externa las moléculas se deberían alinear.

Otros sistemas en el que se han utilizado las ideas desarrolladas para el caso del movimiento browniano es el láser. El láser es un dispositivo que puede producir haces de luz con características muy especiales: los haces están muy colimados y tiene una intensidad mucho más alta que la que se obtiene con fuentes convencionales de luz.

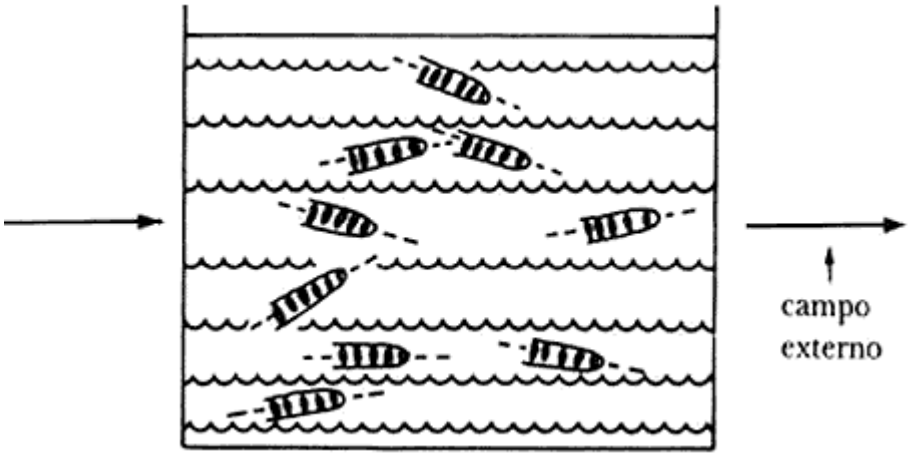


Figura 33. El movimiento browniano rotacional impide el alineamiento completo de las moléculas.

Daremos una breve explicación del funcionamiento de un láser: los átomos y moléculas son entes que tienen valores (o niveles) de energía bien definidos. El estado con el valor más bajo de la energía se llama estado base, mientras

que los otros, con valores mayores de la energía, se llaman estados excitados (Figura 34). A la secuencia de niveles mostrada en la figura 34 se le llama el espectro de energía del átomo o molécula en cuestión. Distintos átomos o moléculas tienen distintos espectros de energía. En cualquier instante el átomo sólo puede tener una de las energías de sus niveles; es decir, el átomo no puede tener una energía con un valor que se encuentre entre los valores de dos de sus niveles. Se dice que la energía está cuantizada. Al ocurrir determinados procesos con el átomo, éste puede cambiar su energía, por ejemplo, a causa de una colisión, de una descarga eléctrica o de calentamiento. En tal caso, el átomo pasará del nivel de energía en que se encuentra a otro diferente. Por ejemplo, puede pasar del estado base al primer estado excitado, o al segundo estado excitado, etc., pero solamente puede empezar y terminar en alguno de los niveles de su espectro. Esto significa que en las transiciones en que se ve involucrado el átomo, los cambios de energía que puede experimentar son iguales a las separaciones ΔE_1. ΔE_2... que corresponden a las diferencias de las energías entre cualquier pareja de sus niveles (Figura 34). Así, se dice que hay una transición entre los niveles involucrados. Por otro tipo de motivos que no vienen en este momento al caso, puede ocurrir que alguna de estas transiciones esté prohibida.

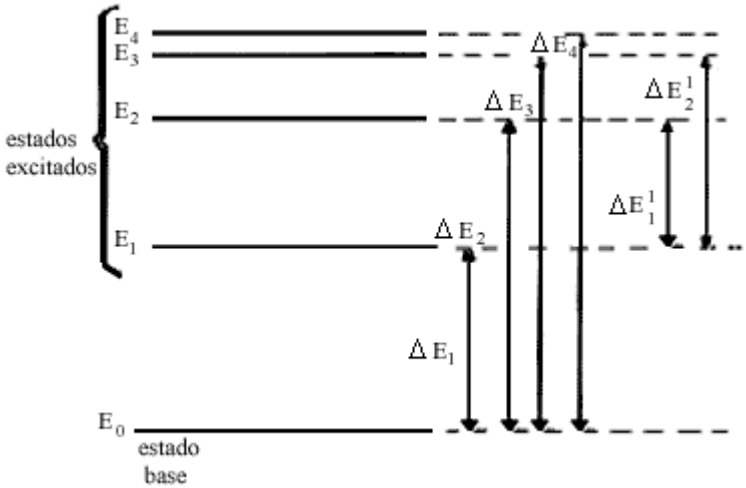


Figura 34. Niveles de energía de un átomo.

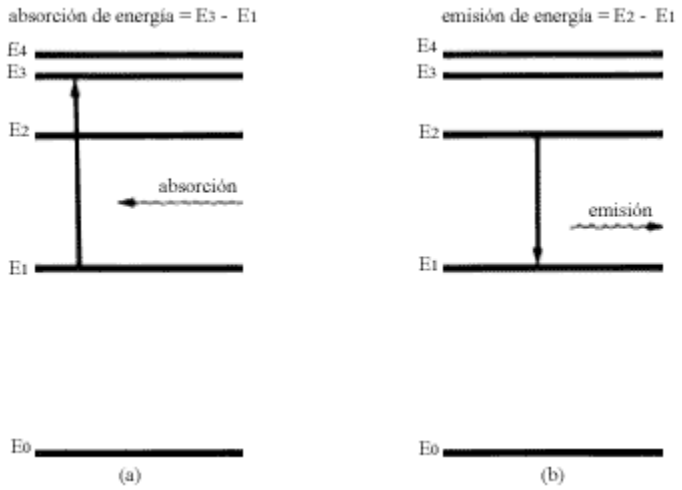


Figura 35. Al pasar el átomo de un nivel bajo a uno más alto lo hace absorbiendo energía (a). Si pasa de un nivel alto a uno más bajo emite energía (b).

Si la transición es de un nivel bajo a otro superior (Figura 35, (a)), se dice que el átomo absorbe energía (igual a la diferencia entre los valores de las energías de dichos niveles), mientras que si pasa de un nivel alto a otro más bajo (Figura 35, (b)), se dice que el átomo emite energía (igual a la diferencia entre los valores de las energías de dichos niveles). Lo anterior significa que un átomo sólo puede absorber o emitir energía en cantidades perfectamente determinadas que, como se acaba de señalar, son iguales a los valores de las diferencias de las energías entre las parejas de niveles cuyas transiciones sean permitidas.

Ahora bien, si un átomo está en un nivel excitado, al ocurrir una transición a un nivel más bajo emite energía en forma de radiación electromagnética. La frecuencia de esta onda emitida es proporcional a la energía emitida, es decir, a la separación entre los niveles en cuestión. Si resulta que la frecuencia tiene el valor entre los límites del espectro visible, el átomo estará emitiendo ondas electromagnéticas que el ojo humano pueda registrar como luz visible. Dado que la frecuencia de la radiación está asociada al color que le asignamos (si está dentro de la región visible) lo anterior significa que determinado átomo sólo puede emitir ciertos colores perfectamente característicos.

Asimismo, el átomo puede absorber energía electromagnética pasando de un nivel a otro de mayor energía. Pero, de lo que acaba de señalar arriba, vemos que solamente puede absorber una energía con valores muy precisos, es decir, sólo podrá absorber la radiación electromagnética con una frecuencia determinada. Si sobre el átomo incide radiación electromagnética cuya frecuencia tenga un valor distinto a cualquiera de los mencionados, entonces el átomo no absorbe dicha radiación; en este caso el átomo es transparente a la radiación incidente.

Si se tiene un conjunto de átomos, por ejemplo los que componen un gas que está en equilibrio a una temperatura dada, la mayoría de ellos se encuentran en su estado base; otro número menor de átomos se encuentra en el primer estado excitado, y a su vez otro número más pequeño todavía se encuentra en el segundo estado excitado y así sucesivamente. Si en estas condiciones se iluminan los átomos con luz de una frecuencia que corresponda a la diferencia de energía entre el estado base y el primer excitado, digamos, el gas absorberá energía de la radiación, ya que hay un número de átomos más grande en el estado base que en el primer estado excitado. En estas circunstancias disminuye la intensidad del campo de radiación, porque parte de su energía ha sido absorbida.

Supongamos que de alguna manera se lograra que en un gas hubiera más átomos en el primer estado excitado que en el estado base. Esta situación no es de equilibrio. En estas condiciones los átomos pasarán en mayor número del estado excitado al base, es decir, habrá emisión neta de energía del átomo al campo de radiación. Si la cantidad de energía proporcionada por los átomos es mayor que las inevitables pérdidas que ocurren, la intensidad de la radiación aumentará. El proceso por el que se logra la inversión de la población de los niveles de energía se llama bombeo óptico, y constituye la fuente de energía de la radiación resultante.

Ahora bien, cuando un átomo se encuentra en un estado excitado, puede ocurrir la transición a un estado de energía más bajo, con la consecuente emisión de radiación, en forma espontánea. Einstein demostró, en 1917, que si un átomo excitado se encuentra dentro de un campo de radiación electromagnética, también puede ocurrir otro proceso de emisión, inducido por el campo. Mientras mayor sea la intensidad del campo, mayor será la probabilidad de que ocurra la emisión inducida. Si no hay campo presente, es claro que no hay esta emisión.

Las radiaciones emitidas en forma espontánea e inducida que ocurren en los átomos de un gas tienen características distintas. La radiación espontánea que emite cada átomo ocurre en forma azarosa. Esto tiene como consecuencia que, por ejemplo, las fases de la radiación emitida por dos átomos sean, en general, completamente independientes una de la otra. Se dice que esta muestra de gas emite ondas que están desfasadas (Figura 36, (a)). Por otro lado, cuando hay emisión inducida, las ondas resultantes están en fase (Figura 36, (b)). Cuando dos ondas se unen, la amplitud neta que adquieren depende de la diferencia de fases que haya entre ellas. Si las ondas están desfasadas, la intensidad resultante es bastante baja, y puede incluso ser nula, mientras que si no hay diferencia de fase, la intensidad resultante es bastante grande. Por tanto, la intensidad de la radiación inducida es mucho mayor que la de la radiación espontánea.

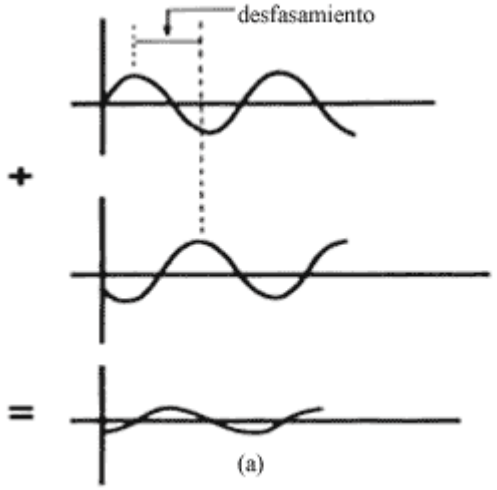
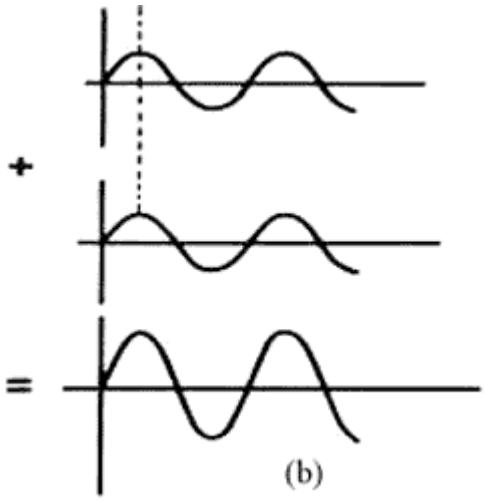


Figura 36. (a) Dos ondas desfasadas que interfieren. El resultado es una onda de muy pequeña amplitud.

Un láser es un dispositivo que emite radiación inducida. Las fuentes convencionales de luz que nos son familiares, por ejemplo un foco eléctrico, emiten radiación espontánea. En consecuencia, la intensidad de la luz emitida por un láser es muchísimo mayor que la emitida por las fuentes de luz convencionales.



36.(b) Dos ondas en fase que interfieren. El resultado es una onda de amplitud grande.

En la figura 37 se muestra un esquema de un láser. El tubo contiene el gas que va a producir la emisión inducida de luz. Se escoge este gas de manera que sus niveles de energía proporcionan radiación en la frecuencia de interés. Por ejemplo, se usan gases como la mezcla de helio-neón o de bióxido de

carbono. En cada extremo del tubo hay un espejo. El bombeo, o sea la inversión de la población, se logra por medio de una descarga de radiofrecuencia, proporcionada por el excitador mostrado. Una vez que los átomos empiezan a emitir por inducción, la intensidad de la radiación aumenta. Los espejos reflejan la luz hacia el gas con el fin de que la intensidad de radiación presente sea grande y así aumente la probabilidad de la emisión inducida. De hecho, éste es un mecanismo de retroalimentación. Es así como la luz generada de esta manera alcanza intensidades muy altas.

La palabra láser es un acrónimo, en inglés, de amplificación de luz por emisión de radiación estimulada (o inducida).

En general, resulta que la intensidad del campo de radiación no tiene un valor constante, ni tampoco ocurre que varíe en forma gradual al transcurrir el tiempo. Este campo experimenta fluctuaciones en el valor de su intensidad, y éstas son al azar; es decir la intensidad del campo es una cantidad estocástica.

Por otro lado, debido a que la emisión inducida que ocurre depende del valor que tenga la intensidad del campo, entonces cuando los átomos de un láser se encuentren dentro del campo de radiación emitirán en forma estocástica. El resultado neto es que, tanto el campo como los átomos, se comportan estocásticamente.

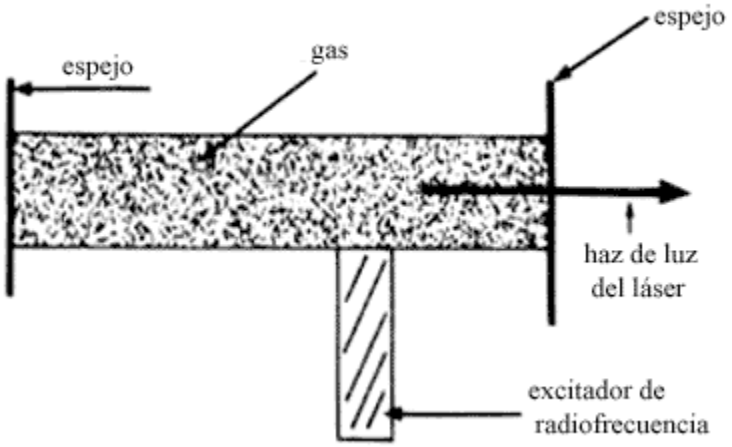


Figura 37. Esquema de un láser.

Se puede pensar que el átomo se encuentra inmerso en un "fluido" (que es el campo de radiación) con el cual experimenta "colisiones" (la interacción entre el átomo y el campo) y que, dada la estocasticidad del "fluido" su comportamiento (el del átomo) es azaroso. Entonces, la descripción completa de un láser debe ser estocástica. Nos encontramos con que el átomo que se encuentra dentro de un campo de radiación electromagnética se comporta en forma análoga a una partícula browniana inmersa en un fluido. Se puede, en consecuencia, hablar de distribuciones de diversas cantidades relacionadas con la luz emitida. Se ha encontrado que se pueden describir las propiedades estadísticas del láser usando las ideas del movimiento browniano a bajas temperaturas. Esto se debe a que láser es un dispositivo cuántico.

XII. ALGUNAS COSAS RARAS COMO LOS FRACTALES

EN LAS últimas dos décadas se ha desarrollado una nueva línea de investigación, iniciada por Benoit Mandelbrot: los fractales.

Si regresamos al capítulo III, donde se explicó la forma en que se encuentra la trayectoria que sigue una partícula browniana, mostrada en la figura 1, resulta que, en rigor, las líneas rectas allá mostradas no tienen ninguna realidad física. Las posiciones sucesivas en cada intervalo de tiempo, cada 30 seg digamos, se marcaron con un punto y luego estos puntos se unieron sucesivamente con líneas rectas. Por tanto, lo único que tiene realidad son los puntos, las posiciones de la partícula browniana al final de cada intervalo. Si ahora en vez de marcar las posiciones en cada intervalo de 30 seg se marcaran en cada intervalo de 3 seg, y se unieran los puntos con líneas rectas, cada línea recta de la figura 1 quedaría reemplazada por una sucesión de líneas quebradas de menor tamaño, pero de igual complejidad (Figura 38). Así, por ejemplo, entre dos puntos sucesivos, como los A y B de la figura 1 (Figura 38, (a)), se obtendrán los puntos mostrados en la figura 38(b)). Concluimos ahora que la figura que se forma tiene el mismo tipo de estructura que la de la figura 1. Se podría ahora tomar intervalos de 0.3 seg y seguir el mismo procedimiento y ocurriría lo mismo que antes. Nos damos cuenta de que la trayectoria que sigue una partícula browniana es tal que continúa teniendo una estructura similar al cambiar la escala de tiempo de la observación. Este tipo de línea fue denominado fractal por Mandelbrot. Un objeto que presenta la misma estructura al cambiarle indefinidamente la escala de observación es un fractal.

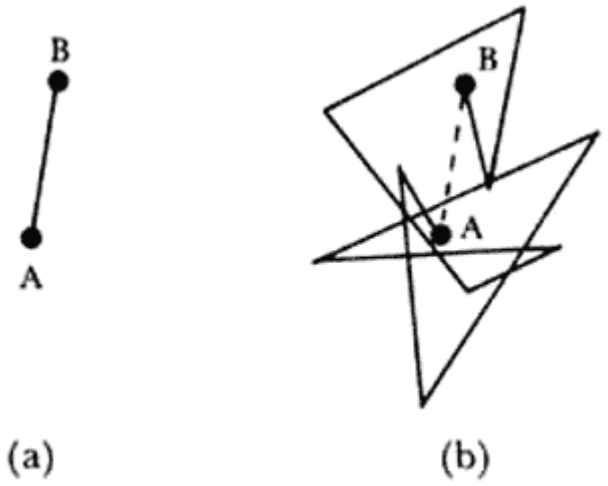


Figura 38. (a) Posiciones de la partícula browniana al inicio y al final de un intervalo de tiempo. (b) Posiciones de la misma partícula browniana al registrarlas en intervalos que son la décima parte del intervalo anterior.

Es interesante notar que ya en 1906 Jean Perrin se había dado cuenta de este tipo de comportamiento. En particular había llamado la atención sobre el hecho de que si uno toma un punto de la trayectoria que sigue una partícula browniana entonces, en rigor, no se puede trazar una línea tangente a ella. Él escribió entonces: "... Usando lenguaje geométrico, curvas que no tienen tangente son la regla, y curvas regulares, tales como el círculo, son interesante pero especiales.

"A primera vista la consideración del caso general puede aparecer un mero ejercicio intelectual, ingenioso pero artificial. Los que oyen de curvas sin tangente tienden a pensar que la naturaleza no presenta tales complicaciones, ni siquiera la sugiere.

"Sin embargo, lo contrario es la verdad. Esta afirmación se puede ilustrar considerando ciertos valores experimentales sin preconcepción.

"Considérese, por ejemplo, uno de los copos blancos que se obtienen al añadir sal a una solución jabonosa. A cierta distancia, su contorno puede dar la sensación de estar nítidamente definido, pero a medida que nos acercamos, esta nitidez desaparece. El ojo ya no puede dibujar una tangente en cualquier

punto. Una línea que a primera vista parecería ser satisfactoria, bajo un escrutinio detallado resulta ser perpendicular u oblicua. El uso de una lupa o de un microscopio nos deja más inciertos, ya que aparecen nuevas irregularidades cada vez que aumentamos la magnificación, y nunca logramos conseguir una impresión nítida, lisa como la dada, por ejemplo, por una bola de acero..."

Y continúa Perrin: .... la característica esencial de nuestro copo es que cualquier escala involucra detalles que prohiben absolutamente la fijación de una tangente.

"Estaremos dentro del dominio de la realidad experimental cuando observamos bajo el microscopio el movimiento browniano con que se agita una partícula (browniana) suspendida en un fluido. Se encuentra que la dirección de la línea recta que une las posiciones ocupadas en dos instantes muy cercanos en el tiempo varía irregularmente en forma absoluta a medida que el intervalo entre los dos instantes se hace menor. Un observador sin prejuicios concluiría, en consecuencia, que está tratando con una curva a la que no se le puede dibujar una tangente."

Tomemos ahora otro caso, por ejemplo el de una costa. Consideremos dos puntos cualesquiera, digamos A y B (Figura 39). Si primero la observamos en un mapa de escala 1/100 000 nos daremos cuenta de que tiene algunas bahías y penínsulas, por ejemplo. Si en seguida volvemos a examinar la misma costa, pero ahora en un mapa que tenga la escala de 1/10 000 aparecerán características que no se veían en el mapa anterior. Así, se ven ahora nuevas bahías y nuevas penínsulas. Si ahora examinamos de nuevo la costa, pero en un mapa que esté a una escala todavía más grande, digamos de 1/1 000, aparecerán unas bahías y penínsulas que no se veían en ninguno de los mapas anteriores. Así podemos continuar indefinidamente. Ahora bien, si comparamos cada uno de los mapas, de diferentes escalas, podemos darnos

cuenta de que todos tienen la misma estructura. Es decir, la costa es también un fractal.

Figura 39. Dos puntos arbitrarios A y B a lo largo de una costa.

Analizaremos en seguida una propiedad inesperada de los fractales: supóngase que se quiere medir la longitud de la costa entre los dos puntos A y B (Figura 40, (a)). Una manera de hacerlo sería medir la longitud de la línea recta que une a A con B. Sin embargo, como se sabe, la costa es, en general, irregular, por lo que es claro que su longitud será mayor que la de la línea recta entre sus dos puntos extremos. Podríamos ahora tomar una unidad arbitraria de longitud H, por ejemplo una barra. Para medir la longitud de la costa llevaríamos esta barra a lo largo de ella (Figura 40, (b)) y contaríamos las veces que la barra cabe en la costa. A este número, denotado por L_1, le llamamos la longitud de la costa. En seguida tomamos otra barra, de menor longitud, digamos H/l0 y repetimos el procedimiento obteniendo para la longitud el número L_2. Podemos continuar indefinidamente de esta manera, tomando unidades cada vez más pequeñas. Intuitivamente esperaríamos que la sucesión de valores que se obtengan para las longitudes L_1, L_2, ... tendería a alcanzar un valor bien definido que sería la longitud de la costa. Sin embargo, esto no ocurre. De hecho lo que pasa es que esta sucesión de longitudes aumenta cada vez más y más. Es decir, al seguir el procedimiento

indefinidamente, ¡la longitud de la costa entre A y B tiende a un valor infinito! Este resultado sorpresivo se debe precisamente al hecho de que al ir cambiando de escala van apareciendo más y más bahías y penínsulas pequeñas, cada una de estas contribuye a la longitud medida. Por muy chica que sea la nueva bahía o península, al ir aumentando la escala, en algún momento deberá ser tomada en cuenta y contribuirá a la longitud. Si uno cambiara el método de medición de la longitud, también llegaría a la misma conclusión.

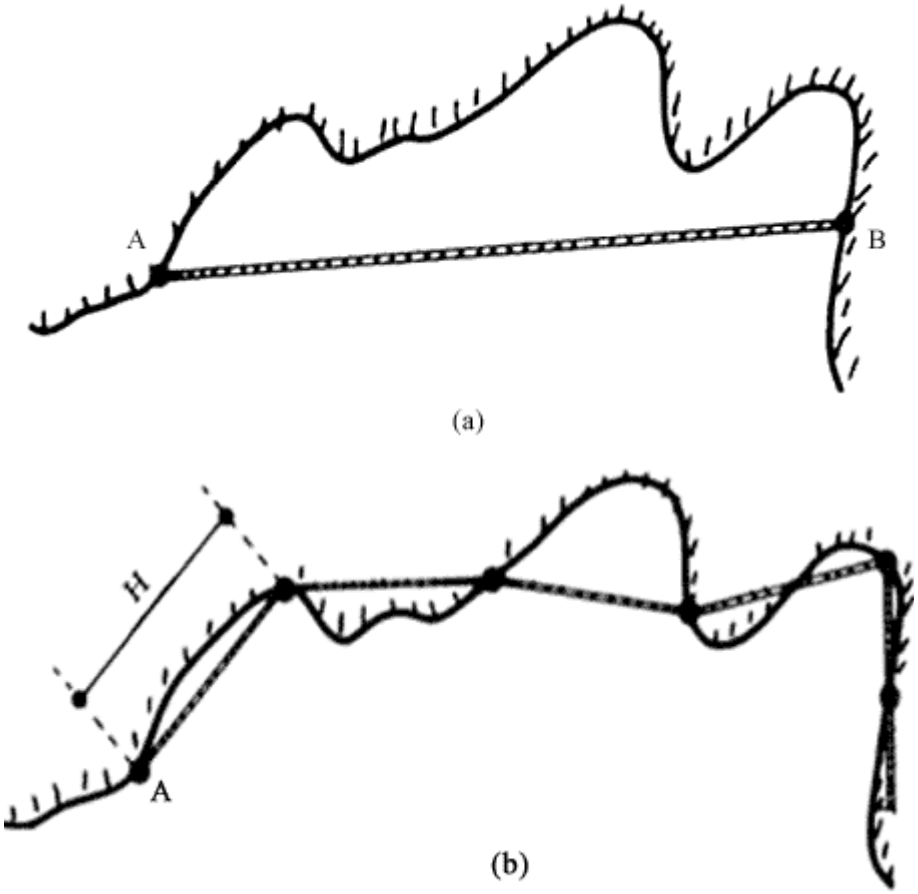


Figura 40. Procedimiento de medición de la longitud de la costa entre A y B.

Lo mismo sucedería si uno quisiera medir la longitud de la trayectoria que sigue la partícula browniana, mostrada en la figura 1. Su valor es infinito.

Otro ejemplo de fractal es la frontera entre dos países. Se puede dar un argumento análogo a los que hemos presentado y se llega a la misma conclusión. Por tanto, ¡la frontera entre dos países tiene, en rigor, longitud infinita!

Concluimos que una característica de los fractales es que al ser examinados con detalle, la longitud entre dos puntos fijos aumenta sin cesar al irnos a escalas cada vez menores.

En 1961 L. F. Richardson presentó una serie de mediciones experimentales que él hizo de varias costas, fronteras y cuerpos geométricos regulares. En cada caso fue cambiando la unidad de longitud H y obtuvo el correspondiente valor de la longitud L(H). En la figura 41 se muestran algunos de sus resultados. Se puede apreciar que al ir disminuyendo el valor de H la longitud L va aumentando. Sin embargo, se puede ver que la variación de L en ciertos intervalos de H no es muy pronunciada.

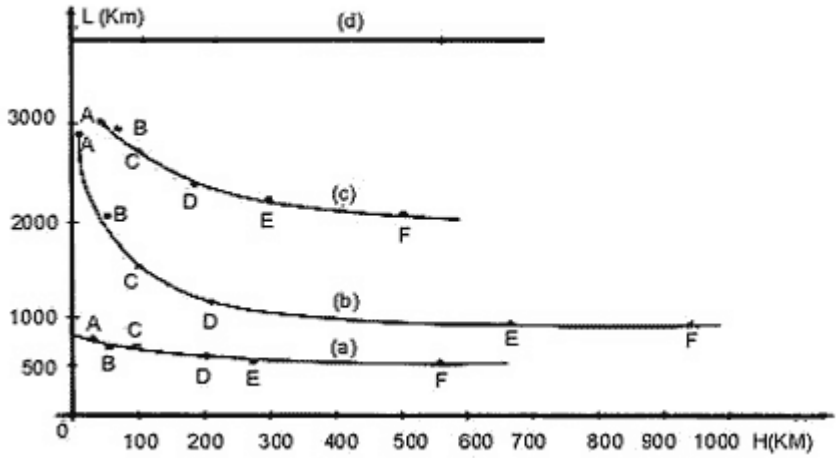


Figura 41. Valores de la longitud L de varias curvas al cambiar la longitud de la unidad de medida H, según L. F. Richardson. (a) Frontera entre Portugal y España. (b) Costa occidental de Gran Bretaña. (c) Frontera terrestre alemana (1900). (d) Perímetro de un círculo.

Podemos ahora preguntarnos lo siguiente: si aplicamos estas ideas a la medición del perímetro de una figura como un cuadrado o un círculo, ¿pasará lo mismo? En la figura 41 se ve que para un círculo el valor de L es constante

(e igual al valor del perímetro del círculo, tal como se enseña en los cursos de geometría) en todo el intervalo de valores de H con el que se hicieron las mediciones. Lo que ocurre es que en las figuras geométricas, al aumentar la escala de observación, no aparecen nuevas estructuras que eran invisibles en la escala anterior ya que la línea que delimita a la figura no tiene estas estructuras. Por ejemplo, el círculo es, por definición, el conjunto de puntos que distan una longitud constante del centro. Por lo tanto, no puede haber algo análogo a la península en el caso de la costa.

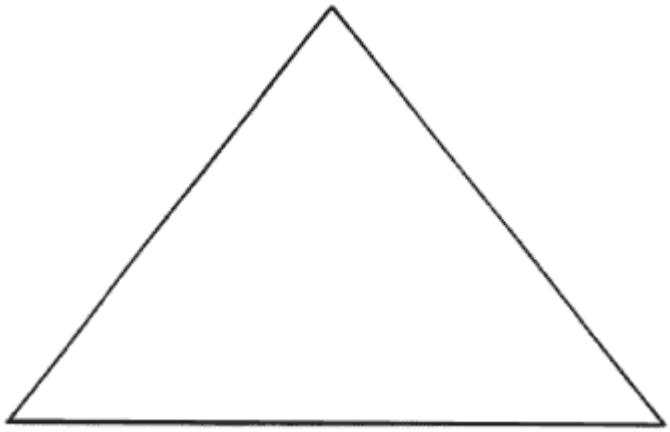
En este punto esperamos que el lector se sienta incómodo. ¿Cómo es posible que, por ejemplo, la frontera entre dos países no esté perfectamente determinada? Pues, efectivamente, en lo que respecta a su longitud no lo está. Richardson menciona que cada uno de los países considera su valor dentro de la longitud de su frontera común. Por ejemplo, España dice que su frontera con Portugal mide 987 km, mientras que Portugal dice que son 1 214 km; Holanda dice que su frontera con Bélgica mide 380 km; mientras que Bélgica reclama que son 449 km. Lo que está sucediendo es que al hacer las mediciones, cada país utilizó, de hecho, diferente valor de la unidad de longitud H, y por tanto, obtuvo otro valor.

La discusión anterior nos lleva a la conclusión inesperada de que la longitud de objetos que son fractales no tiene un valor bien determinado. Esta longitud depende de la unidad H que se escoja. Si dos observadores eligen dos unidades distintas obtendrán dos resultados distintos. ¡Y ambos observadores tendrán razón! Es decir, este tipo de mediciones no es completamente "objetivo". Es claro que, en las relaciones entre países, se debe reconocer el carácter fractal de las cantidades que se van a medir y llegar a un convenio mutuo sobre cuál deberá ser la unidad de longitud que se debe seleccionar.

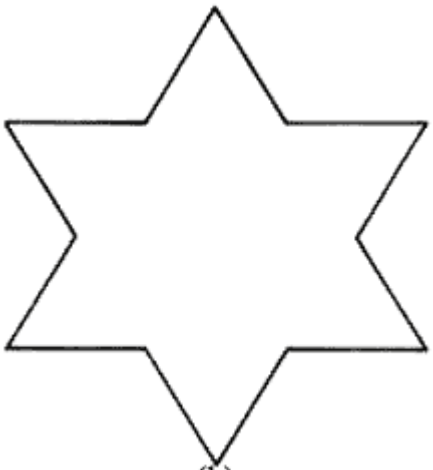
En términos matemáticos los resultados anteriores implican que a diferencia de las curvas unidimensionales, que supuestamente nos son familiares, los

fractales son objetos que tienen dimensión mayor que uno; de hecho pueden tener dimensión cuyo valor está entre 1 y 2.

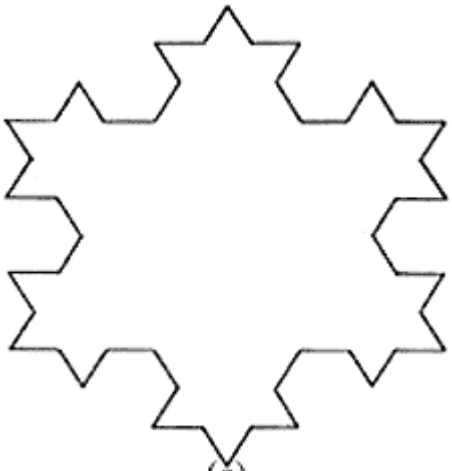
Se puede construir un tipo de figuras fractales siguiendo el ejemplo que a continuación se da. Tomemos un triángulo equilátero cualquiera (Figura 42, (a)), que se llama el iniciador. Divídase cada lado del triángulo en tres partes iguales. En la parte intermedia de cada lado añádase un triángulo equilátero que tenga su lado igual a una tercera parte del original. Se obtiene así la figura 42(b). En seguida, divídase otra vez cada uno de los lados de la figura así formada, en tres partes iguales, y en cada parte intermedia añádase un triángulo equilátero que tenga cada lado igual a la longitud resultante. Se encuentra así la forma mostrada en la figura 42(c). Si se continúa indefinidamente este procedimiento, se encuentra la forma de la figura 42(d). Ésta es un fractal y su perímetro tiene una longitud infinita.



(a)



(b)



(c)

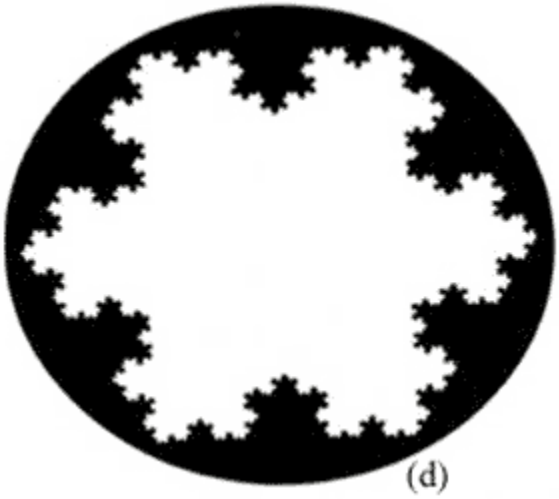


Figura 42. Ilustración de la construcción de un fractal.

Analicemos con un poco de detalle el perímetro de estas figuras. Supongamos que el lado del triángulo iniciador de la figura 42 (a) sea 1; el perímetro del triángulo es entonces igual a 3. Por construcción, cada línea recta de la figura 42(b) tiene longitud (1/3). Por tanto, dado que hay 12 líneas rectas, el perímetro es 12 x (1/3) = 4. Cada línea recta de la figura 42c tiene longitud (1/9). En vista de que hay 48 de éstas líneas, este perímetro es 48)x(1/9) = 5.333.

Vemos entonces que la sucesión de valores de los perímetros es: 3, 4, 5.333, ... Esta sucesión va creciendo. La causa de que crezca es clara, ya que de un paso al otro el número de líneas rectas aumenta más rápidamente de lo que disminuye la longitud de cada línea recta. De hecho, en cada paso el número de líneas se multiplica por el factor 4, mientras que la longitud de cada línea disminuye 3 veces. Por lo tanto, el perímetro se multiplica, de un paso al otro, por el factor 4 x (1/3) = 1.333, que es un número mayor que 1. Si el número de pasos es infinito, el perímetro de la figura así formada también resulta ser infinito.

Mandelbrot ha argüido que en la naturaleza existen muchos fenómenos de carácter fractal, de hecho muchos más de los que nos imaginaríamos. Mencionaremos en forma breve algunos de ellos.

Además de las líneas costeras, los paisajes naturales también tienen características fractales. Así, la forma de cadenas montañosas da lugar a que al intentar medir su superficie, uno encuentre valores infinitos.

En la geometría usual se nos enseña que hay una relación determinada entre, por ejemplo, el área que ocupa una figura y la longitud del perímetro que encierra a dicha área. Esta relación es que la longitud del perímetro al cuadrado es proporcional al área encerrada. El coeficiente de proporcionalidad depende de la forma de la figura que se esté tratando. Así, por ejemplo, para un cuadrado, la longitud de su perímetro elevada al cuadrado es igual a dieciseis veces el área encerrada. Para un círculo, la longitud del perímetro elevada al cuadrado es igual a cuatro veces π por el área encerrada.

Una relación análoga se encuentra entre el volumen de un cuerpo y el área de la superficie que lo encierra. En efecto, se demuestra que el cubo del área es proporcional al cuadrado del volumen encerrado, dependiendo el coeficiente de proporcionalidad de la figura de que se trate.

Si ahora se considera, por ejemplo, el caso de los cerebros de los mamíferos, se sabe que su corteza tiene muchas circumvoluciones. Resulta de mediciones hechas con mucha precisión que la relación entre el volumen del cerebro y el área de la superficie que lo encierra no sigue el patrón arriba dado para figuras geométricas. Se encuentra que el cubo del área es proporcional no al volumen elevado al cuadrado, sino al volumen elevado a una potencia que varía entre 2.73 y 2.79. Se puede demostrar que este resultado implica que la superficie que encierra al cerebro es fractal. Esto se ha explicado en términos de las necesidades de la evolución de los mamíferos.

Otro ejemplo biológico ocurre en la estructura nasal de algunos animales. La membrana que cubre el hueso de la nariz es tal que la relación entre área y

volumen encerrado no sigue un patrón geométrico, sino fractal. Ciertos animales tienen un área muy grande para el volumen que encierran. Esta membrana podría estar relacionada con el sentido del olfato, y por ejemplo en el caso de los camellos, su gran área les ayudaría para localizar, husmeando, el agua que es muy escasa en los desiertos.

La descarga y el nivel de las crecidas de los ríos son otro ejemplo de fractales. Resulta que estas cantidades, tomadas anualmente, tienen valores muy persistentes. Se han intentado dar, infructuosamente, diversas explicaciones de este hecho. Aparentemente, la única que tiene visos de conformarse con los resultados experimentales es que estas cantidades se comportan como fractales.

También se han aplicado las ideas de los fractales en economía. Un análisis detallado del comportamiento de los cambios de precios de los productos muestra que tienen una estructura análoga a la de un fractal. Esto se debe que al cambiar de escalas temporales en la determinación de estos cambios, se encuentran estructuras análogas.

En lingüística también aparecen estructuras fractales. Se han estudiado las relaciones que, en un idioma determinado, sigue la frecuencia de uso de palabras. Pues resulta que este comportamiento es fractal. Uno de los parámetros de este fractal da la medida de qué tan rico es el uso del vocabulario a través de la frecuencia relativa del uso de palabras raras.

Se ha podido determinar que los fractales también aparecen en la teoría de circuitos eléctricos y en la teoría de la información, por mencionar sólo algunos campos. Se han abierto de esta manera vastos horizontes de estudio y aplicación que apenas han empezado a explotarse.

CONCLUSIONES

HEMOS revisado, en forma breve, el fenómeno físico del movimiento browniano. A lo largo de nuestra reseña se ha visto que históricamente no se trató de dar sólo la explicación de un fenómeno muy interesante. El movimiento browniano ha sido fuente de luz sobre otro tipo de fenómenos que ocurren en la naturaleza.

En primer lugar, concurrentemente con la explicación de sus causas, dio lugar a resolver de una vez por todas la disputa que existía, en los medios científicos de fines del siglo pasado, acerca de la estructura de la materia.

Asimismo, por tratarse inherentemente de un proceso irreversible, proporcionó uno de los primeros casos cuya evolución se pudo estudiar con todo detalle. Es importante mencionar que, para poder realizar este programa, fue necesario establecer las herramientas matemáticas adecuadas. Dado que para la descripción del fenómeno era indispensable tratar con cantidades estocásticas, se tuvo que desarrollar la teoría matemática de las funciones no-diferenciables.

Una vez entendido el movimiento browniano a nivel fenomenológico se inició la investigación acerca de su fundamentación microscópica. En vista de que en este caso se tienen condiciones favorables en las que una partícula es mucho más pesada que cada uno de los átomos que componen el fluido en que se mueve, se ha podido avanzar considerablemente en la teoría microscópica correspondiente. Este desarrollo ayudó a dilucidar, entre otras, una cuestión tan fundamental como la transición de una descripción reversible, como lo es la microscópica, a una descripción irreversible, como lo es la macroscópica. Al aclararse satisfactoriamente las paradojas propuestas por Loschmidt y Zermelo, se afianzaron las bases conceptuales de

la edificación así lograda. Asimismo, se encontraron las causas fundamentales de la aparición de la estocasticidad.

Sin embargo, el estudio microscópico del movimiento browniano proporcionó otra posibilidad, a saber, estudiar el fenómeno a muy bajas temperaturas. En este caso, es necesario utilizar la mecánica cuántica para la descripción y como consecuencia se encuentran otros tipos de comportamiento que no hubiera sido posible hallar fenomenológicamente. Por ejemplo, se descubrió la persistencia de las fluctuaciones, que es un fenómeno que apenas se está estudiando hoy día y sobre el cual aún hay mucho que aprender.

Otras facetas del movimiento browniano se encuentran en diversas situaciones físicas que tienen gran importancia, no sólo conceptual, sino de aplicación práctica como son los coloides. Una parte importante de muchos procesos industriales se basa en las propiedades de sustancias coloidales.

Asimismo, se han aplicado las ideas y métodos generados en las investigaciones sobre movimiento browniano al estudio de otros fenómenos, que son físicamente distintos, pero que tienen características muy parecidas. Uno de estos sistemas es el láser, cuya importancia no se puede subestimar. A pesar de que obviamente un láser y una partícula browniana a baja temperatura son sistemas físicos distintos, resulta que tienen propiedades estadísticas análogas y, por tanto, las técnicas de análisis desarrolladas para el segundo sistema se pueden aplicar al primero.

En la parte final del libro hemos presentado un nuevo horizonte que en los últimos años ha emergido del estudio del movimiento browniano, a saber, el fascinante tema de los fractales. Resulta que en la naturaleza hay una cantidad apreciable de fenómenos que tienen carácter fractal. Cada día, investigadores de todo el mundo presentan nuevas contribuciones a lo largo

de estas líneas de pensamiento. No es exagerado decir que este tema apenas está en su infancia.

Hemos ilustrado, pues, un hecho muy importante en el desarrollo de la ciencia: la forma en que un fenómeno, el movimiento browniano (cuya explicación era importante hallar) abrió y sigue abriendo de manera explosiva una serie de campos y nuevos horizontes, tanto científicos como de aplicación práctica.

CONTRAPORTADA

Robert Brown (1773-1858) fue un médico inglés cuyo interés principal se volcó hacia la botánica pero, curiosamente su nombre ha quedado inscrito con rasgos indelebles en el campo de la física gracias a su descripción del movimiento continuo de las partículas minúsculas en una solución: el ahora llamado movimiento browniano. El doctor Eliezer Braun dedica este libro al estudio de ese curioso movimiento que, aunque extrañó a los científicos de su tiempo, no pudo ser explicado y así permaneció desde la fecha de los trabajos de Brown (1828) hasta 1905, cuando el genio de Alberto Einstein lo explicó en uno de los tres famosos trabajos que publicó ese año, utilizándolo contra los escépticos que no creían en los átomos.

En su estudio *Un movimiento en zigzag*, el doctor Braun nos conduce a una interesante excursión científica en la que hace una disección de las teorías decimonónicas sobre el calor que desembocaron en la termodinámica y, más adelante, con el descubrimiento de la estructura atómica de la materia. Los estudios sobre el movimiento browniano han pasado del campo de lo teórico, del mundo de las ideas, al de lo práctico. Entre los muchos empleos que se le han encontrado destaca, en nuestros días, el láser —por no mencionar aerosoles, geles, emulsiones, etc. — Y el estudio del movimiento browniano aún no culmina. Ha dado origen al descubrimiento de cosas que pueden

parecer tan extrañas como los fractales, teoría que lleva, entre otras muchas cosas, a la conclusión de que la frontera entre dos países cualquiera ¡puede ser infinita! "Parece ser —dice Braun— que el movimiento browniano, que se creyó pieza de museo, apenas está empezando a vivir.

Diseño: Carlos Haces/Fotografía: Carlos Franco.